C. DIBVADII

IN

GEOMETRIAM EVCLIDIS

prioribus ſex Elementorum libris comprehenſam

Demonſtratio Linealis.

AD

CHRISTIANVM IV.

Sereniſſimum Daniæ & Septentrionis Regem.



ARNHEMII GELDRIÆ,

Apud IOHANNEM IANSONIVM.

cIↃ. IↃ. C. III.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

Digitized by Google

Serenissimo et Potentissimo Principi Christiano Quarto

Daniæ, Norvegiæ, Schlavorum & Gothorum Regi, Duci in Schleſvuick, Holſatia, Stormarn & Dietmarſchen, Comiti in Oldenburgo & Delmenhorſt, Hamburgenſium Protectori, &c.

Domino suo clementissimo.

Ex omnium artium & ſcientiarum generibus, quæ miſera mortalium ſollicitudo, inſigni induſtria ſollertique indagine effinxit, nullum Serenissime Rex Matheſi minus opinionum commentis involutum, nullum certioribus rationibus fultum, nullũ quod maiori contemplantis animum iucunditate impleat, nullum quod fœcundiores in genus humanum Belli aut Pacis tempore fructus effundat, in hoc mundi Theatrum prodijt: ut conſociata Numinis proprietate ſignata illa ingenia credere fas ſit, quæ ſe primum talium tantarumque rerũ meditationi, immiſcuerunt. Non ad id oſtendendum verborũ fucus conquirendus, non Eloquentiæ amplum flumen aperiendum: Experiuntur ſatis, potentiſsimi rerũ Domini & Principes, qui clauum reipublicæ tenent, quot quantaque Mathemata humano generi commoda adferant; ſive cum prata, agri, ſylvæ, Iuſtitiæ limitæ circumducendæ ſint; ſive cum vrbium ſtructura, amœnitas, ſitus,

Geometria
Architectura.
Optica.
Perſpectiva.
Fortalicia.

¶ 2 robur

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Hydraulica. Iſoropica. Argonautica. Tactica. Aſtronomia. Aſtrologia.

robur & vis examinanda; ſive cum aquæ ſubterraneo rivo ad uſum ſalubritatem aut jucunditatẽ aliquo deducendæ; ſive cũ immenſa pondera loco ſuo movenda; ſive cum remotæ terræ noſtris jungendæ; ſive cum exercitus ordinate in acie diſponendus; ſive cũ per aſsiduas temporum vices, qui ſeculi infinita ſeries ſua lege feſtinet attendendum; ſive cum tacitum illud cælum inter terramque negocientis naturæ detegendum commercium; ſive cum quicquam fere communis reipublicæ utilitatis cauſa ſit ſuſcipiendum. Ex arte itaque hac ſummam ad rempub. promanare utilitatem, tot ævi huius circa eam occupata Heroum ſatis convincit induſtria. Italiæ & Germaniæ omnes fere Principes ac Duces eius ſtudio, animos ſuos excolunt & reficiunt. Amant eam eiuſque Profeſſores, ſummi Orbis Reges & Monarchæ. Suffragio ſuo, publicoque teſtimonio [ut unum loco omniũ adducam] Invictiſsimus IACOBVS SEXTVS, ANGLIÆ, SCOTIÆ & HYBERNIÆ REX Affinis S. R. M. T. chariſsimus eam approbavit, ſuoque filio his verbis cõmendavit. *I graunt it is meete ye haue ſome entrance, ſpeciallie in te Mathematikes; for the knowledge of the art militarie, in ſituation of Camps, ordering of battels, making fortifications, placing of batteries, or ſuch like. An l let not this your knowlege bee dead without fruites, as S. Iohn ſpeaketh of faith: but let it appeare in your daily conuerſation, and in all the actions of your life.* Naturæ quodam impetu ſublimem quoque animũ R.M.T. ad Mathematum ferri ſtudiũ, nova vrbis Hafnienſis Daniæ Metropolis facies in Arce, Academia, Mœnibus cœteriſq; ſuis Ornamẽtis, haut

In libro qui inſcribitur DONVM REGIVM *parte ſecunda ſub finem.*

Artiũ & ſciẽtiarũ mediocrem guſtum non damno, potiſſimum *Mathematũ*, ob Scientiam Militarem, in caſtrametatione, cuneorum ordinatione, munimimẽ fabrica, tormẽtorũ directione, & ſimiliũ. Nec harũ in te cognitio otioſe abſque fructu interquieſcat, ſed ut Iohannes de fide loquitur, Cotidie in omnibus vitæ tuæ actionibus efficaciter eluceat.

haut occulte innuit,ut de ea proferri poſsit quod olim denato Auguſto de Roma, vrbem CHRISTIANVS IV. quam ligneam & ſtramineam offendit, latericeam & marmoream reliquit. Tuæ itaque Maieſtati SERENISSIME REX Commentariũ hunc qualemcunq; meum in EVCLIDEM auctorem vetuſtiſsimum, qui omnia Matheſeos Elementa & principia [ſine quorum exacta perceptione, omnis in arte hac ſuperfluus labor] in unũ cõgeſsit, dedicare volui, ut ſubmiſsi animi mei, de *Patriæ* tanta noſtræ per optimũ *Principem* felicitate, atq; R.M.T. iam acceſſu novæ prolis, adaucti in Hamburgenſes imperij, Affiniſque R.M.T. Chariſsimi ad ſummã in Orbe potentiã eueſti, tantopere locupletata, quaſique ad culmen perducta beatitudine, gratulationẽ publico teſtimonio proderẽ, Tuæque R.M. conatibus quantũ in me erat humilime inſervirem, atq; fauorabilem Maieſtatis auram, gratæ voluntatis ſignificatione, ulterius in me deducerem: cuius ſi me ſuaves benignique halitus refecerint, vires ad maiora utilioraq; tentanda, dabunt. Summus ille auctor & conditor rerum DEVS trinus & unus, qui Regum corda moderatur, qui gubernationes felices efficere ſolus poteſt, qui ſapientiã per quã Reges regnant largitur, nobis M.T. quã diutiſsime ſuperſtitẽ florentemq; cum dulciſsima Regina tua & nuper nato Rege, trianquillitate publica cõſervet. Vale ô REX SERENISSIME. Lugduni Batavorum, Kal. Novembris, Anno Salutis CIↃ.DC.III.

R. M. T. ST.

CHRISTOPHORVS DIBVADIVS,
Doctor Medicus & Mathematicus.

IANI DOVSÆ,

Nordovici & Cattendyckij toparchæ, ſummi apud Batavos Conſilij aſſeſſoris; magni Archivorum & Feudorum præfecti, & Illuſtris Academiæ apud Batavos Curatoris,

In C.V. C. Dibvadii, Doctoris Medicinæ & Matheſeos, demonſtrationem Linealem.

A*vctores mundi numeros occultaque rerum,*
Et Archimedis ſacra queis Ianvs *meus*
Cælo prælußit & aſtris
Nouus futurus indiges,
Aucturuſque Deûm numeros, turbamque beatam,
Polumque magnum, mente quem vidit prius,
Sacri Chironis alumnus,
Nec unius Dibvadivs
Phœbi dulcis honos, facilem deduxit in orbem,
Addenſque plura pauciora reddidit.
Nunc ſacro percitus œſtro,
Et debiti voti reus,
Quæ concluſa diù, terriſque ignota iacebant,
Nec expiando forſitan ſilentio,
Longiſque abitura tenebris,
Aut temporis contagio,
Mnemoſynes locat in gremio, teſteſque Camœnas,
Et obſtetricem voce Lugdunum ciens,
Regi donabit & orbi
Magni futuram nominis
Progeniem, partumque haud uno vate canendum:
Quos inter ecce Dovsicvm *præconium,*
Et laudi nata Camœna,
Vicem Leuanæ præſtitit.

In demon-

Digitized by Google

In demonſtrationem Linealem
Cl. V. Christophori Dibvadii
Dani, Medicinæ Doctoris, & Matheſeos.

Felices operum, qui cœli pendula templa,
  Cauſaſque pronis deſtinatas ignibus,
Submiſere animis, æquataque pondera terræ
  Suſpenſa caſtis patris in complexibus
Ætheris, & juſto libratum examine pontum.
  Et architectum mente prægreſſi Deum
Exceſſere hominum curas, & præmia vulgi,
  Fineſque rerum, ſordidoſque limites.
Non illos Acheron, ignavaque janua lethi,
  Nec ora centum terruêre Cerberi,
Nec triſtes Furiæ, larvataque nomina Manes,
  Nec fabuloſæ Parca vox potentiæ.
Præcepêre Deos animis, & fata ſequendo
  Neceſſitatis inſtitêre ſemitam,
Liberaque incertos mens dedignata labores,
  Opinionum vana per contagia,
Anfractuſque ſequi, toti ſe ſurripit orbi,
  Et certitates ipſa metitur ſuas.
Nos tua Dibuadi veſtigia pone ſecuti
  Trophæa tantis deſtinamus auſibus,
Nec dulcis choreæ, nec carminis inſcia turba:
  Septentrionem ſæpe dicturi tuum,
Vicinamque Helicen, & non tractabile cœlum.
  Tu ſibilantis colla livoris preme
Degeneremque hydram: ſic indignante noverca
  Nunc ipſe cœlum magnus Alcides tenet.

Daniel Hein[redacted]s,

Græcorum & Latinorum Poëtarum interpres.

Ad Clariſſ.

Digitized by Google

Ad Clariſs. D.D. CHRISTOPHORVM DIBVADIVM Zelando-Danum Medicum ac Mathematicum EVCLIDEM felicibus auſpicijs illuſtrantem.

Si flammas rapuit cœleſti ex arce prometheus
Sy phœben cœlis abſtulit Endymion.
Poſteritas credet DIBVADJVM *& palladis arte*
Ac phœbi ætherei ſurripuiſſe domos;
Quæ, ſecreta, aperit, tenebrarum nube ſoluta,
EVCLIDIS, *nullo tempore viſa prius.*
Extant multorum fateor, docta ἐξηγήματα, verum
Eruit his nemo, myſtica ſenſa viri.
Detegit hæc primus DIBVADJVS *Apolline doctus*
DANORVM *ſplendor, pegaſidumque decus.*
Mirando ingenij & felicis acumine pandit
Quid NVMERVS *valeat,* LINEA *quidve poteſt.*
Addit inauditam tenebris mens enthea Lucem
Dum ſolida obſcuros, explicat arte locos.
Sunt igitur digni, DIBVADI *laude labores,*
Hanc etenim ſolus cur mereatur habet.

LVDOLPHVS POTTERVS Groeningenſis,
I.V. Doctor, ætate Septuagenarius.

LECTORI S.

AB EVCLIDIS *lectione, ampla Commentationum Volumina, etſi doctiſſima, plurimos deterruerant. Nos vero benigne lector utilitati tuæ non gloriæ noſtræ conſulentes, ne temporis aut pecuniæ iacturam faceres, plano breuique commentario auctoris mentem aperuimus, in quo hæc tibi obſervanda. Cum duo latera [ut prop 4. lib. 1.]* CB, bd *duobus lateribus* DE, ef *æquantur, intelligendum* CB *&* DE *inter ſe æqualia eſſe, &* bd, ef, *inter ſe æquari. Deinde in citatione propoſitionum, cum alius numerus additur, ut prop. 4. 1. poſterior librum, prior propoſitionem denotat, Si poſterior numerus non addatur, ſcias in eodem libro quem legis propoſitionem reperiri. Hæc ſunt de quibus te monendum in Veſtibulo duxi, ſi gratus tibi noſter labor fuerit, reliquos* EVCLIDIS *libros, ſimili commentario illuſtratos, aliquando dabimus. Vale: hæcque menda priuſquam legas emenda.*

Folio 6. Paragrapho 2. CCF lege CDF. p. 11. BD, EC. l. BC, ED. f. 7. p. 1 l minorem p. 12. ut baſis l ut & baſis. f. 10. p. 20 l demonſtrabis. f. 17. p. 7. DML. l. EML. f. 19 p. 20. per 3. l per 35. f. 20. p. 17. l parallela f. 23. p. 9. CBD. l CDE. p. 11. CED. l. CBD. f. 25. p. 25. l. habeant. f. 28. p. 29. poſt BN æquale. l. eſt autem & DL eidem BN æquale. f. 29. p. 19. quare & l. eo quod p. 27. DC. l BC. f. 31. p. 6. q[illegible] l & DFB, DFC. f. 41. p. 27. FH l. EH. f. 42. p. 27. CE l. CF. p. 28. DF l. DE p. 29. EC, FD. l. [illegible] f. 46 p. 26. & l. ut. p. 27. l. ducantur CID, CF. f. 47. p. 2 ſimplex ICF l. ſimplex ICB. f. 48. p. 13. l. puncto. f. 53. p. 19. l. rectangulum cum quadrato de IA. f. 60. p. 25. l. ſemirectus eſt, & ad baſin anguli recti. f. 63. p. 12 l. rectæ. f. 64. p. 2. DIC. l. EIC. f. 73. p. 2. BC. l. BD. f. 82 p. 31. AB l. CB. prop. 15. lib. 6. ubicunque A ponitur, lege H & vbi C, l. G. f. 87. p. 28. DC. l. BC. f. 93. p. 25. ad AF. l. CF.

EVCLIDIS

Digitized by Google

EVCLIDIS ELEMENTORVM PRIMVS.

Doctrinam triangulorum planorum, hoc libro auctor perſequitur, idque via varia; angulos & latera aliquando inter ſe conferendo, aliquando vero ſeorſim examinando. Deinde parallelorum proprietates aperit; Poſtremo parallelogrammorum contemplationem aggreditur, idque via eadem, qua ſuperius in triangulis uſus erat. Definitiones vero vocum præmittit, ne diverſa earum acceptio, iuniorem Mathematicum perturbet.

DEFINITIONES.

1. *Punctum eſt, cuius pars nulla eſt.*
2. *Linea eſt, longitudo, latitudinis expers.*
3. *Lineæ termini ſunt puncta.*
4. *Recta eſt, quæ ex æquo ſua interiacet puncta.*
5. *Superficies eſt, quæ longitudinem latitudinemq; tantũ habet.*
6. *Superficiei extrema lineæ ſunt.*
7. *Plana ſuperficies eſt, quæ ex æquo ſuas interiacet lineas.*
8. *Planus angulus eſt, duarum linearum in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.*
9. *Rectilineus angulus appellatur cum quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint.*
10. *Cum recta ſuper rectam conſiſtens, eos qui ſunt deinceps angulos æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterque æqualium angulorum, & quæ inſiſtit recta, perpendicularis vocatur eius, cui inſiſtit.*
11. *Obtuſus angulus eſt, qui recto major eſt.*
12. *Acutus, qui minor eſt recto.*
13. *Terminus eſt quod alicuius exptremum eſt.*

Digitized by Google

14. *Figura eſt, quæ ſub aliquo vel aliquibus terminis continetur.*

15. *Circulus, eſt figura plana, ſub una linea comprehenſa, quæ* Peripheria *appellatur, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ æquales ſunt.*

16. *Hoc vero punctum centrum circuli appellatur.*

17. *Diameter eſt recta per centrum ducta, & ex utraque parte in circuli peripheriã terminata, quæ circulũ æquibiſecat.*

18. *Semicirculus eſt figura, quæ continetur ſub diametro, & ſub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.*

19. *Segmentum circuli eſt figura, quæ ſub recta & circuli peripheria continetur.*

20. *Rectilineæ figuræ, quæ ſub rectis continentur.*

21. *Trilateræ, quæ ſub tribus.*

22. *Quadrilateræ, quæ ſub quatuor.*

23. *Multilateræ, quæ ſub pluribus quam quatuor.*

24. *Trilaterarum figurarum, Æquilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.*

25. *Iſoſceles, quod duo tantum æqualia habet latera.*

26. *Scalenum, quod tria inæqualia habet latera.*

27. *Rectangulum eſt, quod rectum angulum habet.*

28. *Ambligonium, quod obtuſum angulum.*

29. *Oxigonium, quod tres acutos angulos habet.*

30. *Quadrilaterarum figurarum Quadratum eſt, quod æquilaterum & rectangulum eſt.*

31. *Altera parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, at æquilatera non eſt.*

32. *Rhombus, quæ æquilatera, ſed rectangula non eſt.*

23. *Rhomboi-*

Digitized by Google

33. *Rhomboides, quæ adverſa & latera & angulos habens inter ſe æquales, neque æquilatera eſt, neque rectangula.*

34. *Præter has, reliquæ quadrilateræ figuræ Trapezia appellãtur.*

35. *Parallelæ, rectæ lineæ ſunt, quæ cum eodem ſunt plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram ſibi mutuo incidunt.*

POSTVLATA.

1. *Poſtulatur, ut à quovis puncto in quodvis punctum, rectam ducere concedatur.*
2. *Rectam terminatam, in continuum rectà producere.*
3. *E quovis centro & intervallo circulum deſcribere.*

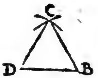
AXIOMATA.

1. *Quæ eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia.*
2. *Si æqualibus æqualia addantur, tota ſunt æqualia.*
3. *Si æqualibus æqualia auferantur, relinquuntur æqualia.*
4. *Si inæqualibus æqualia addantur, tota ſunt inæqualia.*
5. *Si inæqualibus æqualia auferantur, relinquuntur inæqualia.*
6. *Quæ eiuſdem dupla ſunt, inter ſe ſunt æqualia.*
7. *Quæ eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe æqualia ſunt.*
8. *Quæ ſibi mutuo congruunt, inter ſe ſunt æqualia.*
9. *Totum, ſua parte maius eſt.*
10. *Omnes recti anguli, inter ſe ſunt æquales.*
11. *Si in duas rectas, altera recta incidens, internos ad eaſdemq; partes angulos, duobus rectis minores fecerit; duæ illæ rectæ in infinitum protractæ, ſibi mutuo incidunt, ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores. Duæ rectæ ſpatium* [ſeu ſuperficiem] *non comprehendunt.*

Digitized by Google

PROPOSITIO PRIMA.

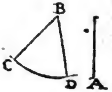
Super data recta terminata triangulum æquilaterum conſtituere.



Data ſit BD è cuius puncto B, interuallo B D circulus deſcribatur *per 3. poſt.* Et ex oppoſito puncto D, interuallo eodem alius circulus deſcribatur. Erunt ergo circuli illi æquales. Puncto interſectionis C, lineis C B. C D *per 1. poſt.* ductis, B C æquabitur B D, cui & C D æqualis erit *per 15. def.* Erunt ergo *per 1. axiom.* C B. C D inter ſe æquales, & triangulum B C D. æquilaterum; quod erat faciendum.

PROP. II.

Ad datum punctum datæ rectæ, æqualem rectam ponere.



Punctum datum B ſit, recta A: centro B circulus CD, interuallo BC, æquali A deſcribatur *per 3. poſt.* ductæ BC. BD *per 1. poſt.* æquales erunt *ex 15. deſin.* Atqui interuallum C B *ex conſtructione*, æquale eſt rectæ A: erunt ergo A & B D *per 1. axiom.* inter ſe æquales. Ex dato ergo puncto B æqualem rectam B D poſuimus.

PROP. III.

Duabus datis rectis inæqualibus, de maiore, æqualem minori rectam auferre.



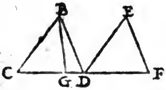
Maior ſit B C minor A; centro C. intervallo C D æquali A, ſecatur B C in puncto D *per præcedentem.* erit ergo D C æqualis A. *per 15. deſin.*

PROP.

Digitized by Google

PROP. IV.

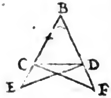
Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumque utrique, habeant vero & angulum angulo æqualem, ſub æqualibus rectis contentum; & baſin baſi æqualem habebunt, eritq; triangulum triangulo æquale, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, utrumque utrique, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur.



Sint latera B C, *bd* lateribus D E, *ef* æqualia & angulus C B D angulo E. Si baſis C D baſi D F maior fuerit, reddatur æqualis minori *per* 3. & ſit C G, ducaturq; B G. Si duo latera C B. *bg* duobus lateribus D E. *ef* exiſtimentur æqualia, & baſis C G, baſi D F; angulus C B G non erit æqualis D E F, cum abſciſſus ſit GBD, quod eſt contra hypotheſin. Sunt ergo baſes æquales, & anguli C. *bdc*, angulis E D F. *f*.

PROP. V.

Iſoſcelium triangulorum qui ad baſin ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales; & productis æqualibus rectis, qui ſub baſi ſunt anguli, inter ſe æquales erunt.

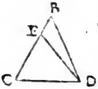


Trianguli Iſoſcelij laterib. B C. B D æquali interuallo extenſis ad E & F puncta, lineæ E D. F C ducantur. Quoniam latera B E. *bd* laterib. B F. *bc* *per conſtructionem* æquantur, & angulum B habeant communem, baſes quoque E D. C F inter ſe æquales erunt *per* 4. & angulus E angulo F; & E D B, angulo F C B; & E D C, angulo F C D. Sed ſi C D E. D C F auferantur, relinquuntur *per* 3. *axiom.* B C D. B D C. ad baſin anguli æquales. Rurſus C E. *ed* latera, D F *fc* lateribus æquantur & E & F anguli ut antea oſtenſum eſt.

Ergo & baſes , cum reliquis angulis. Conſtat ergo liquido DCE. DCF ſub baſi angulos æquales eſſe.

PROP. VI.

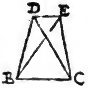
Si trianguli duo anguli æquales inter ſe fuerint, & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt.



Sint anguli *c*. BDC æquales; ſi latera æqualia non fuerint, abſcindatur ex BC. majore *per* 3. CE æquale BD rectâ ductâ ED. Quoniam igitur duo latera BD *dc* duobus lateribus EC. *cd* æquantur, ſunt autem & anguli ſub his lateribus inter ſe æquales, erunt baſes BD. EC *per* 4. æquales & tota triangula BCD. ECD inter ſe æqualia, & reliqui anguli reliquis angulis, pars & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo latera BC. BD inæqualia erunt.

PROP. VII.

Super eadem recta, duabus eiſdem rectis, aliæ duæ rectæ æquales, utraque utrique, non conſtituentur ad aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes; eoſdemque terminos cum duabus initio ductis rectis habentes.



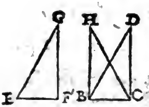
Super recta BC ad eandem partem ſuperiorem duabus rectis BD. *dc.* aliæ rectæ BE. *ce.* æquales [*ſi fieri poteſt*] erigantur, eoſdem terminos poſſidentes, hoc eſt rectarũ BD. *be* terminus B erit & *cd* CE, terminus C. ducta DE. Cum igitur, BD. BE. latera æqualia ſint, auguli BDE. BED ſuper baſi DE *per* 5. æquales erunt; ac proinde cum BED angulus CED angulo minor ſit *per* 9. *axiom.* erit & BDE eodem CED minor. Quare adhuc minor multo CDE angulus erit, pars BDE anguli eodem CED angulo. Rurſus cum CE. CD. æquales ſint, anguli ad baſin DE æquales erunt.

Digitized by Google

erunt. Sed CDE angulum CED. angulo maiorem multo eſſe oſtendimus. Idem ergo CDE, & minor & æqualis eſt CED angulo, quod abſurdum eſt. Non ergo BD. BE inter ſe æquales ſunt, nec CD. CE.

PROP. VIII.

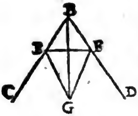
Si duo triangula duo latera, duobus lateribus utrumque utrique æqualia habuerint, & baſin baſi æqualem; angulum quoque ſub æqualibus rectis contentum æqualem habebunt.



Quod ſi res ſe non ita habeat: duorum triangulorum GEF. DBC. latera lateribus æqualia ſint ut baſis baſi, anguli vero G & D. inæquales, ſuper baſin BC aliud triangulum erigatur cuius HB. *hc* latera, *ge.* GF lateribus æqualia ſint, & H angulus G angulo. Erit ergo CH æqualis CD &, BH. BD. *contra* 7. & reliqui anguli, reliquis angulis *per* 4. hoc vero falſum eſt, cum HCB. angulus pars ſit DCB anguli.

PROP. IX.

Datum angulum rectilineum æquibiſecare
[hoc eſt, bifariam ſecare.]



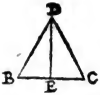
Datus angulus B ſit, rectis BC *bd,* æquales BE *bf* abſcindantur, & connectantur recta EF, ſuper quam triangulum EGF æquilaterum *per.*1. erigatur, ducta BG angulum æquiſecat. Nam latera FB *bg* lateribus EB *bg* æquantur, ut & baſes GF. GE inter ſe. Ergo FBG angulus, EBG angulo æquabitur *per.*8.

PROP.

Digitized by Google

PROP. X.

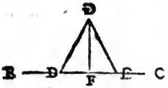
Datam rectam finitam æquibiſecare.



Super recta finita B C. triangulum æquilaterum *per* 1. erigatur, cuius D angulus *per* 9. recta D E æquibiſecetur. Cum igitur D B. *de*, lateribus D C. *de* æquentur, & angulus eiſdem contentus lateribus angulo; baſes quoque BE. E C. *per* 4. æquabuntur.

PROP. XI.

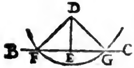
Data recta, à puncto in ea dato, rectam ad rectos angulos erigere.



In recta B C datum punctum ſit F, ſumatur F D æqualis F E *per* 3. *poſt.* ſuper D E triangulum æquilaterum *per* 1. ponatur, ducta F G perpendicularis erit. Quia enim latera D F. *d g* lateribus F E. *e g* æquantur *per conſtructionem*, anguli dictis lateribus contenti æquales erunt *per* 8. quare dicetur uterque rectus *per* 10. *def.*

PROP. XII.

Super datam rectam infinitam, à dato puncto quod in ea non eſt, perpendicularem rectam deducere.

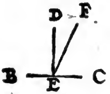


Puncto dato D, extra rectam infinitam B C. quolibet intervallo circulus ducatur, qui datam rectam, in punctis quibuſlibet F & G, ſecet; ducantur F D, G D, & angulus D *ex* 9. per D E rectã æquibiſecetur. Quoniam F E, *e d*; æquantur E G, *e d*, *ex conſtructione*, & baſes D F, D G, *per* 15. *def.* anguli quoque D E F, D E G, *per* 8. æquabuntur. Erit ergò uterque angulus rectus, & linea D E perpendicularis *per* 10. *def.*

PROP.

PROP. XIII.

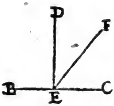
Cum recta rectæ inſiſtens, angulos facit; aut duos rectos, aut duobus rectis æquales, efficiet.



Recta F E. rectæ B C. inſiſtens, angulos F E C, F E B, faciat: ſi F E, perpendicularis fuerit ad B C, erunt dicti anguli, duo recti *per* 10. *defin.* ſi non recti ſint, erigatur puncto E perpendicularis E D, *per* 11. Iam cum tres anguli B E D, D E F, F E C æquentur duobus rectis, etiam compoſitus angulus D E C, & ſimplex D E B duobus rectis æquales erunt: ſiquidem exceſſus vnius, diminutio eſt alterius.

PROP. XIV.

Si ad aliquam rectam, atq; ad eius punctum, duæ rectæ non ad eaſdem partes ductæ, eos qui ſunt deinceps angulos, duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ.



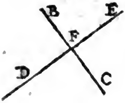
Ad punctum E liniæ D E in diuerſas partes eductæ rectæ B E, E C efficientes angulos deinceps B E D, D E C duos rectos, aut duobus rectis æquales; erunt duæ illæ rectæ in directum conſtitutæ, ita ut B E C ſit una linea recta. Si non; ſit E F in directum poſita cum B E, erunt *per* 13. B E D, D E F anguli, duobus rectis æquales. Sed minores ſunt, ob angulum F E C qui deficit, *contra* 10. *axiom.* omnes enim recti anguli inter ſe ſunt æquales. Non ergo F E directa eſt cum E B.

PROP. XV.

Si duæ rectæ ſe mutuò interſecent; angulos ad verticem æquales inter ſe efficient.

Quoniam B F E, B F D anguli, duobus rectis æquantur

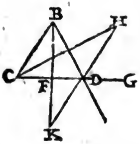
Digitized by Google



per 13, ut & BFD, DFC anguli, *per eandem*: communi BFD ablato, remanebunt *per* 3. *axiom*. BFE, DFC æquales inter ſe. Sic quoque demonſtrabitur angulos BFD, EFC inter ſe æquales eſſe.

Prop. XVI.

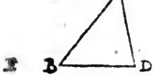
Cuiuſcunque trianguli uno latere producto; externus angulus, utrolibet interno & oppoſito, maior eſt.



Extendatur latus CD in G æquibiſecto BD *per* 10; ex C per E recta CEH extendatur, ita ut EH æqualis ſit CE, ducaturq; HD. Quoniam latera CE *eb*, lateribus HE *ed* æquantur *per conſtructionem*; ſunt autem anguli ad E dictis lateribus contenti inter ſe æquales *ex* 15; erit *per* 4. baſis CB baſi HD æqualis, & angulus CBE angulo EDH. ſed externus BDG angulus, EDH maior eſt, totus nempe parte. igitur & externus angulus, maior erit interno & oppoſito CBD. Similiter extenſa BD in L, & æquibiſecta CD, &c. demonſtrabitur externum angulum CDL, interno & oppoſito maiorem eſſe. Eſt autem angulus BDG, æqualis CDL *per* 15. igitur & CDL maior erit interno & oppoſito CBD. Eſt autem idem BDG maior quoq; oſtenſus angulo interno & oppoſito CBD. cuiuſcunq; igitur, &c.

Prop. XVII.

Cuiuſcunque trianguli duo anguli, duobus rectis ſunt minores, omnifariam ſumpti.

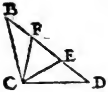


Producatur BD ad E. quoniam *per* 16. CBE interno & oppoſito angulo D maior eſt; ſi communis angulus CBD addatur, erunt duo anguli CBE, CBD maiores

maiores duobus angulis C B D, C D B *per* 4. *axio*. ſed C B E, C B D *per* 13. duobus rectis æquales ſunt. igitur C B D, C D B minores ſunt duobus rectis. Eadem eſt de reliquis ſingulis binis angulis, ſimul ſumptis, demonſtratio. cuiuſcunq; ergo, &c.

Prop. XVIII.

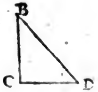
Omnis trianguli maius latus, maiorem angulum ſubtendit.



Maius latus ſit B D. erit ergò angulus C angulo D maior. ſi non; *per* 3 de B D auferatur B E, æqualis B C: quoniam latera æqualia ſunt, erunt *per* 5. anguli ſuper baſin C E æquales. Eſt autem B E C angulus E D C maior *per* 16. igitur & angulus B C E, maior B D C angulo erit: quamobrem, cum angulus totus B C D maior adhuc ſit B C E angulo *per* 9. *axiom*. erit B C D angulus multo maior B D C angulo. Eadem eſt demonſtratio de B angulo.

Prop. XIX.

Omnis trianguli maior angulus, maiori lateri ſubtenditur.

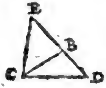


Sit C angulus maior. Si B D maius latus non ſit, aut æquale erit cum B C, aut minus. Si æquale, *per* 5 D & C anguli æquales erunt. Eſt autem C per hypotheſin maior, ergò maior & minor æquales erunt, quod abſurdum eſt. Si minus dicatur quàm B C, erit C angulus minor quam D, cum minus latus maiorem angulum ſubtendat *ex præcedenti*: ponitur autem maior quod magis eſt abſurdum; ergò cum nec æquale nec minus fuerit, maius erit.

Digitized by Google

Prop. XX.

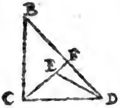
Omnis trianguli duo latera, reliquo ſunt maiora, quomodocunque ſumpta.



Trianguli B C D latus D B extendatur in E, ita ut E B æquale ſit C B & connectantur E C. *per* 5. E & B C E anguli æquales erunt. Eſt autem E C D angulus E angulo maior *per* 9. *axioma.* in triangulo ergo E C D latus E D, maiori angulo E C D oppoſitum, maius erit latere C D, quod minori angulo E opponitur *per* 19. Cum igitur latera C B, B D ſimul, æqualia ſint ipſi E D, erunt quoque latera C B, B D ſimul, maiora latere C D.

Prop. XXI.

Si ſuper trianguli uno latere, ab extremitatibus duæ rectæ interius conſtitutæ fuerint; hæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.



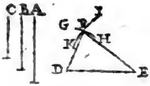
Trianguli B C D extremitatibus C & D, interius rectæ C E, D E ducantur, & C E ad F prolongatur. Quoniam C B, B F maiora ſunt C F latere *per* 20; ſi commune F D addatur, erunt C B, B D maiora quàm C F, F D *per* 4. *axiom.* Rurſus quia D F, F E maiora ſunt E D, ſi commune C E addatur, erunt D F, F C maiora quàm D E, E C. maiora ergò erunt C B, B D, quàm C E, E D, quod primò proponebatur. præterea, quoniam D E C, angulo E F D maior eſt *per* 16. & E F D angulo F B C. *per eandem:* erit D E C, angulo D B C maior multò, quod ſecundò proponebatur.

Prop.

Digitized by Google

PROP. XXII.

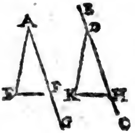
Ex tribus rectis, quæ tribus datis rectis æquales ſunt, triangulum conſtituere. oportet autem duas rectas, reliquâ eſſe maiores, omnifariam ſumptas.



Tres datæ rectæ A, B, C ſint, & D E æqualis A; puncto D interuallo D F æqualis C, arcus G F H deſcribatur *per* 3. & interuallo F E æquali B, arcus K F I centro E ducatur; rectæ puncto interſectionis F, ad D & E puncta ductæ, datis rectis æquales erunt, ſcilicet D E. A. & D F. C. & E F. B. quod erat faciendum.

PROP. XXIII.

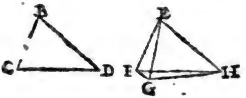
Ad datam rectam, datumq; in ea punctum, dato angulo rectilineo, æqualem angulum rectilineum ponere.



Ad punctum D, rectæ B C, angulum A ponemus; ſi de A G, abſcindatur A F æqualis A E *per* 3, & D H æqualis A F ſumatur: iam ſi ſuper D H collocentur D K. *k h,* æquales A E. *e f per* 22. erit D, angulo A æqualis *per* 8. quod oportebat facere.

PROP. XXIV.

Si duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habuerint, utrumque utrique; angulum verò angulo maiorem, ſub æqualibus rectis contentum: & baſin baſi maiorem habebunt.



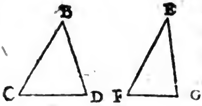
Duo latera C B, *b d* duobus lateribus F E, *e g* æqualia ſint: angulus verò B angulo E F G maior;

Digitized by Google

maior; dico baſin CD baſi FG maiore ...e. Sit enim *per* 23. FEH angulus factus B æqualis, & EH latus æquale EG, hoc eſt, BD; ducantur FH, HG. Quia ergò latera CB *bd* lateribus FE *eh* æquantur, & angulus B angulo FEH *per conſtructionem*; baſes CD, FH æquales erunt *per* 4. Rurſus quia duo latera EG, EH inter ſe æquantur, ad baſin GH anguli G & H æquales erunt *per* 5. Eſt autem EHG maior FHG angulo *per* 9. *axiom.* Igitur & angulus EGH maior eodem FHG erit. quare multò maior erit totus angulus FGH eodem angulo FHG. In triangulo igitur FGH, maius erit latus FH, latere FG *per* 19. Eſt autem oſtenſum FH æquale eſſe CD. maior igitur erit quoque CD quàm FG, quod eſt propoſitum.

Prop. XXV.

Si duo triangula, duo latera, duobus lateribus, æqualia habuerint, utrumque utrique; baſin verò baſi maiorem: & angulum ſub æqualibus rectis contentum, angulo maiorem habebunt.



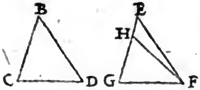
Latera CB *bd*, lateribus FE *eg* æquentur; & baſis CD baſi FG maior ſit: Si B angulus E angulo maior non fuerit; aut æqualis erit, & tunc baſes æquabuntur *ex* 4. quod eſt contra hypotheſin: aut minor, & ſic CD minor foret FG *ex præcedenti*, quod etiam contra hypotheſin eſt. ergò angulus B nec æqualis eſt cum E, nec minor; quare maior fuerit.

Prop. XXVI.

Si duo triangula, duos angulos, duobus angulis æquales habuerint, utrumque utrique, unumq; latus uni lateri æquale, ſeu quod æqualibus adiacet angulis, ſeu quod uni æqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua latera, reliquis lateri-

Digitized by Google

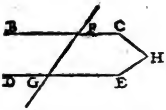
lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulum, reliquo angulo æqualem habebunt.



Anguli C, *d*; angulis G, *e f g* æquentur; & C D latus G F lateri. Si iam E G, latere B C maius fuerit, æquale abſcindatur *per* 3, quod ſit H G, ducaturq; H F. quoninm B C *c d*, æquantur H G *g f*, & anguli C & G per hypotheſin; D angulus æqualis erit H F G angulo *per* 4. Ponitur autem idem D æqualis G F E angulo; Quare & angulus G F H eidem G F E æqualis erit, pars toti quod eſt abſurdum. Non eſt ergo B C inæquale E G: nec angulus angulo.

Prop. XXVII.

Si in duas rectas, recta incidens, alternatim angulos æquales inter ſe fecerit, parallelæ erunt inter ſe illæ rectæ.



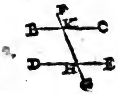
In rectas B C, D E, recta F G incidens angulos B F G, F G E efficiat æquales: ſi datæ rectæ parallelæ non fuerint, concurrant alicubi, ut exempli gratia, in H, ut efficiatur triangulum F H G. Erit B F G angulus, interno & oppoſito F G H maior *per* 16, quod eſt contra hypotheſin. ita quoque demonſtrabitur eas non coituras ad partem oppoſitam; quare B C, D E parallelæ fuerint.

Prop. XXVIII.

Si in duas rectas, recta incidens, externum angulum, interno & oppoſito, & ad eaſdem partes, æqualem fecerit; aut internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ.

Sit FKC, angulo KHE æqualis: ſed & BKH eidem FKC æqualis eſt

Digitized by Google



lis eſt *per* 15. erunt ergo anguli alterni KHE, HKB æquales *per* 1 *axiom.* quare liniæ BC, DE parallelæ erunt *per præcedentem.* Deinde ponantur CKH, EHK duobus rectis æquales: ſunt autem & CKF, CKH duobus rectis æquales *per* 13. ſi communis CKH auferatur, relinquetur CKF externus, EHK interno & oppoſito æqualis. rectæ ergò BC, DE parallelæ ſunt.

Prop. XXIX.

In parallelas rectas, recta incidens, & alternatim angulos inter ſe æquales efficit; & externum interno & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem; & internos & ad eaſdem partes, duobus rectis æquales facit. Vide figuram præcedentem.

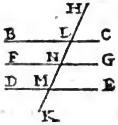
Si anguli altern[illegible] KH, KHE non ſint æquales; ſit BKH maior. Si communis CKH addatur, erunt duo BKH, CKH maiores duobus KHE, CKH *per* 4 *axiom.* Atqui BKH, CKH duobus rectis æquales ſunt *per* 13. igitur KHE, CKH minores ſunt duobus rectis: coibunt ergò *per* 11. *axiom.* BC, DE ad partes CE quod eſt abſurdum, cum ponantur parallelæ. Sunt igitur anguli alterni æquales, eademq; demonſtratio eſt alternorum CKH, KHD. Deinde, quia CKH angulo, alternus KHD æqualis eſt, ut oſtenſum eſt, & idem CKH æqualis FKB *per* 15. erunt *per* 1. *axiom.* FKB, KHD inter ſe æquales. Poſtremò, quoniam oſtenſum fuit FKB, æqualem eſſe KHD; ſi communis BKH addatur, erunt duo FKB, BKH, duobus KHD, BKH æquales *per* 2. *axiom.* ſed duo FKB, BKH duobus rectis æquales ſunt *per* 13. ergò & duo KHD, BKH duobus rectis æquales erunt.

Propo.

Digitized by Google

PROP. XXX.

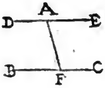
Quæ eidem rectæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ.



Ponatur BC parallela FG. erit ergò BLN angulus, LNG æqualis *per* 29. Rurſus ponatur DE eidem FG parallela. Erit ergo DML, eidem LN G æqualis. Quare anguli BLN, EML æquales inter ſe *per* 1. *axiom.* Cum igitur ſint alterni, erunt rectæ BC, DE parallelæ *per* 27.

PROP. XXXI.

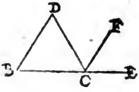
A dato puncto, datæ rectæ parallelam ducere.



A puncto dato A, in datam rectam BC, ducatur recta utcunque AF, faciens angulum quemcunque AFB, cui æqualis alternus EAF conſtituatur *per* 23. ad punctum A rectæ AF. Erunt ergò BC, DE parallelæ *per* 27.

PROP. XXXII.

Cuiuſcumque trianguli vno latere producto, duobus internis & oppoſitis eſt æqualis: & trianguli tres interni anguli duobus rectis æquales ſunt.



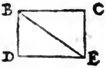
Extendatur BC in E, puncto C *per* 31. recta CF, parallela BD ducatur. Quoniam igitur DC in parallelas incidit, alterni anguli D & DCF æquales erunt: & externus angulus FCE interno B æqualis *per* 29. cum recta BE in eaſdem parallelas incidat: &

C cum

cum DCB, DCE *per* 13. duobus rectis ſint æquales, tres trianguli anguli, duobus rectis æquales ſunt.

Prop. XXXIII.

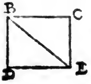
Rectæ, quæ æquales & parallelas ad partes eaſdem coniungunt, & ipſæ æquales & parallelæ ſunt.



Sint parallelæ & æquales BC, DE coniunctæ rectis BD, CE, ducaturque BE, quæ cum in parallelas incidat, angulos alternos CBE, DEB efficiet *per* 29. æquales. Ergò cum duo latera BC *be* duobus lateribus DE *eb* æquentur, & anguli dictis lateribus contenti; baſes quoque CE, BD & anguli CEB, DBE æquales erunt *per* 4. Sunt verò hi anguli, alterni inter rectas CE, BD. Ergo ipſæ rectæ parallelæ *per* 27.

Prop. XXXIV.

Parallelogrammorum ſpatiorum, æqualia ſunt inter ſe, quæ ex aduerſo & latera & anguli; atque illa æquibiſecat diameter.



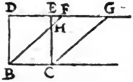
In parallelogrammo ducatur BE, quæ alternos angulos efficiat æquales, ut CBE cum DEB, & CEB cum DBE *per* 29. Itaque cum duo anguli CBE *ceb* duobus angulis DEB *dbe* æquentur, & latus BE utrique triangulo commune ſit, rectæ BC, DE, & BD, CE æquales erunt, & angulus C angulo D, & duo triangula BCE, BDE, æqualia *per* 26 & 4. Ergò diameter BE parallelogrammum æquibiſecat.

Prop. XXXV.

Parallelogramma ſuper eadem baſi & in eiſdem parallelis conſtituta

Digitized by Google

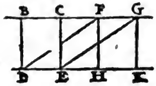
ſtituta inter ſe ſunt æqualia. [quo ad aream, non quo ad angulos & latera.]



Super baſin B C duo parallelogramma ponantur D C, & C F. Quoniam D B, E C, & F B, G C æquantur; & D E, B C, & F G, B C *per* 34. etiam triangula D B F, E C G, quo ad latera & angulos inter ſe æqualia ſunt *per* 4: ablato communi triangulo E H F, remanebit trapezium D B H E trapezio F H C G æquale *per* 3. *ax.* Quocirca addito communi triangulo B H C, fiet totum parallelogrammum B C E D, toti parallelogrammo B C G F æquale *per* 2. *axiom.*

Prop. XXXVI.

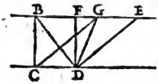
Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.



Sint parallelæ B G, D K & parallelogramma æqualium baſium B E, F K, ducanturq; D F, E G quæ parallelæ erunt *per* 33: parallelogrammum G D æquale erit B E *per* 3 . & F K. Erit ergo parallelogrammum B E parallelogrammo F K æquale *per* 1. *ax.*

Prop. XXXVII.

Triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.



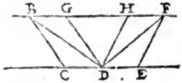
Super baſin C D collocentur duo triangula B C D, C G D inter eaſdem parallelas B E, C D; puncto D ducantur rectæ D E, *d f* parallelæ rectis C G *c b*, *per* 31. Erunt ergo parallelogramma C F, C E æqualia *per* 35. Sed horum dimidia ſunt triangula data, quod D B, D G dia-

 metri,

metri, parallelogramma C F, C E æquibiſecent *per* 34. Ergò & triangula B C D, C G D æqualia erunt *per* 7. *axiom.*

Prop. XXXVIII.

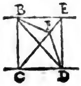
Triangula ſuper æqualibus baſibus & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.



Inter parallelas B F, C E triangula B C D, F E D æqualium baſium C D, D E collocentur; puncto D, rectæ D G, *d h* parallelæ rectis C B, *e f* ducantur *per* 31: Parallelogramma G C, H E æqualia erunt *per* 36: Atqui horum dimidia ſunt data triangula *per* 34: Erunt ergò hæc inter ſe æqualia *per* 7. *axiom.*

Prop. XXXIX.

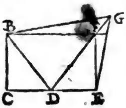
Triangula æqualia ſuper eadem baſi & ad eaſdem partes conſtituta, & in eiſdem parallelis ſunt.



Si triangula B C D, E D C ad baſin C D ſint æqualia; B E verò parallelæ non fuerit, puncto B *per* 31. ducatur B F parallela C D; & F D. Erunt ergò triangula B C D, F D C *per* 37. æqualia. Sed ex hypotheſi triangulum E D C æquale eſt B C D; Igitur triangula E D C, F D C æqualia erunt *per* 1. *axiom.* quod eſt abſurdum. Ergò B E parallela eſt C D.

Prop. XL.

Triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus & ad eaſdem partes conſtituta, & in eiſdem parallelis ſunt.

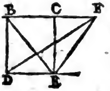


Si duo triangula B C D, F E D æqualia, ſuper baſes æquales C D, D E collocentur; B F verò C E parallela non fuerit: ex B ducatur B G parallela C E; & G E. Erunt ergò trian-

triangula B C D, G E D æqualia *per* 38. Atqui F E D æquale ponebatur B C D triangulo. Ergò *per* 1. *axiom.* G E D, F E D æqualia erunt, quod eſt abſurdum. Ergò B F, C D aprallelæ ſunt.

PROP. XLI.

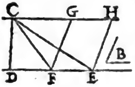
Si parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit, in eiſdemq; parallelis fuerit, duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.



Super eadem baſi D E, parallelogrammum D C & triangulum D F E collocentur inter eaſdem parallelas B F, D E; diameter B E ducatur. Triangula B D E, D F E æqualia erunt *per* 37. Atqui parallelogrammũ D C duplum eſt trianguli B D E, quod triangula B C E, B D E æqualia inter ſe ſint *per* 34. Igitur & trianguli D F E duplum erit idem parallelogrammum C D *per* 6. *axiom.*

PROP. XLII.

Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.



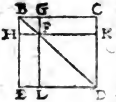
Datur angulus B, & triangulum C D E, cui æquale parallelogrammũ ponendum. Æquibiſecetur D E *per* 10, & fiat E F G angulus B æqualis *per* 23. ducatur *per* 31. puncto C recta, parallela D E infinitè, & puncto E, recta parallela F G, incidens in C H. Erit ergo in angulo E F G qui dato B æqualis eſt, parallelogrammum F H, conſtitutum æquale triangulo dato: quia parallelogrammum F H duplum eſt trianguli C F E *per* 41. & C D E eiuſdem trianguli duplum, cum ſuper æquales baſes D F, F E & in eiſdem parallelis collocentur *ex* 38. Erunt ergò parallelogrammum F H & triangulum C D E æqualia, *per* 6 *axiom.*

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

PROP. XLIII.

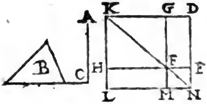
In omni parallelogrammo, complementa eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia.



In parallelogrammo EC circa diametrum BD, parallelogramma ſint HG, LK; & complementa CF, FE. Cum triangula BCD, BED *per* 34 æqualia ſint, & FKD, FLD triangula: ſi hæc ab illis demantur, remanebunt trapezia BCKF, BELF æqualia *per* 3. *axiom.* ſunt verò triangula BGF, BHF æqualia *per* 34, quæ ſi auferantur ab æqualibus trapezijs, remanebunt æqualia complementa CF, FE *per* 3. *axiom.*

PROP. XLIV.

Ad datam rectam, dato triangulo, æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.



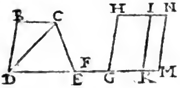
Datur recta A, triangulum B, angulus C quicunque. Conſtituatur triangulo B æquale parallelogrammum DF, angulum habens EFG, dato C æqualem *per* 42. Extendatur EF in H, ita ut FH æqualis ſit rectæ A, & DG extenſa, ei æqualis KG, connectantur KH: ducatur deinde ex K per F diameter, donec incidat in DE protractam in puncto N, à quo recta parallela rectæ EH ducatur *per* 31, ſecans KH protractam in L; producatur GF ad M: parallelogrammum LF ſatisfacit quæſito. Habebit enim latus FH æquale datæ CA, & HFM angulum, C dato: cum HFM angulus GFE angulo æqualis ſit *per* 15, qui factus eſt æqualis C angulo. Eſt etiam parallelogrammum LF triangulo B æquale, cum æquale ſit complemento DF *per præcedentem*, quod æquale factum eſt triangulo B.

PROP.

Digitized by Google

PROP. XLV.

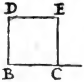
Dato rectilineo, æquale parallelogrammum, in dato angulo rectilineo ponere.



Datur rectilineum B E, reſolutum in triangula C B D, C E D, & angulus F, & recta G H; ad cuius punctum G angulus ponatur, F æqualis *per* 23, & efficiatur parallelogrammum H K æquale triangulo C B D *per* 42. Ad K L quoque, [G H æqualem] applicetur parallelogrammum L M æquale triangulo C E D. Quoniam G H parallela & æqualis eſt K L, & eidem M N; ergò & G H, M N, & G M, H N æquales & parallelæ erunt *per* 33. Erit itaque totum parallelogrammum H M, toti rectilineo B E æquale, latus & angulum habens rectæ & angulo datis æqualem.

PROP. XLVI.

A data recta quadratum deſcribere.

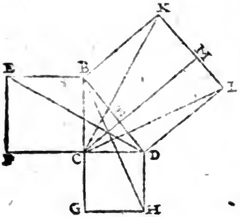


Datur recta B C, ex B & C perpendiculares *per* 11 educantur B D, C E; ſintq; ipſi C B æquales, connectatur D E. Cum B, & C anguli recti ſint, B D, C E parallelæ erunt *per* 28. Sunt verò & æquales. Ergò B C, D E parallelæ & æquales *per* 33, & omnes lineæ æquales. Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum E D, æquales ſunt B C, oppoſitis *per* 34. Quadratum ergò eſt D C *per* 30. *defin.*

PROP. XLVII.

In rectangulis triangulis, quadratum quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt ijs, quæ à lateribus rectum angulũ conſtituentibus deſcribitur quadratis.

Trianguli B C D angulus C rectus ſit, erigantur ſuper ſingula

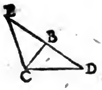


gula eius latera, quadrata *per præcedentem*; ducatur puncto C parallela rectæ D L *per* 31, ſecans K L in M, & iungantur C L, C K, B H, D E. Quia duo anguli D C B, D C G recti ſunt, in directum erunt G C, C B *per* 14. eodemque modo F C, C D una recta erunt. Rurſus, quia anguli C D H, B D L æquales ſunt, cum ſint recti; ſi addatur communis C D B; fiet totus B D H angulus, toti C D L æqualis *per* 2. *axiom.* Similiter totus angulus D B E, toti C B K. Quoniam igitur C D, *dl*, æqualia ſunt H D, *db*, *ut conſtat ex definitione quadrati*; ſunt autem & anguli C D L, H D B hiſce lateribus contenti æquales, *ut oſtendimus*. Erunt tringula C D L, H D B æqualia *per* 4. Eſt autem parallelogrammum C H duplum trianguli H D B *ex* 41, cum ſint inter parallelas D H, B G & ſuper eandem baſin D H; & parallelogrammum D M duplum trianguli C D L, quod ſint inter parallelas D L, C M, & ſuper eandem baſin D L. Quare æqualia erunt quadratum C H & parallelogrammum D M *per* 6. *axiom.* Eadem ratione oſtendemus æqualia eſſe quadratum E C, & parallelogrammum N K. Quamobrem totum quadratum K D ex D M, N K parallelogrammis compoſitum, æquale eſt duobus quadratis E C, C H.

PROP. XLVIII.

Si quadratum quod ab uno laterum trianguli deſcribitur, æquale ſit ijs, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur quadratis; angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.

Sit triangulum C B D, cuius ſuper C D latus, erectum quadratum,



dratum, æquale ſit quadratis laterum C B, BD. Deinde puncto B liniæ C B perpendicularis *per* 11. æqualis B D *per* 2. erigatur. connectatur E C. Quoniam igitur C B E angulus rectus eſt, quadratum de E C quadratis de E B, B C æquabitur *per* 47. Atqui quadratum de E B quadrato de B D æquatur, ob linearum æqualitatem: Quare quadratum rectæ E C quadratis rectarum C B, B D æquale erit. Cum ergò quadratum de C D eiſdem rectarum quadratis æquale ponatur; Erunt quadrata rectarum E C, C D æqualia *per* 1. *axiom.* ergò & rectæ ipſæ. Quoniam igitur latera C B, *be*, latetibus B C, *bd* æqualia ſunt, & baſis E C baſi C D, *oſtenſus eſt* æqualis; anguli C B E, C B D æquales erunt *per* 8. eſt autem C B E rectus, ex conſtructione; ergò & C B D rectus erit.

FINIS LIBRI PRIMI.

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
SECNDVS.

IMmenſum uſum rebus Geometricis, & humanis commercijs adfert. Sumuntur enim pulchra calculi compendia ex hoc libro. Surdorum doctrina admirabilis tota hinc dependet. Algebraicarum æquationum reſolutiones, inſigni artificio hinc deducuntur; quibus nihil humana mens diuinius, nihil abſtruſius, nihil utilius, nihilque facilius excogitare unquam potuit. Quam vim 12. & 13. huius cum 47. primi, in Aſtronomicis habebant, tum demum quivis intelliget, cum in triangulorum tractationem inciderit, in qua ſemper ex tribus notis, ad reliquorum trium notitiam, mediante arcuum & chordarum tabula pervenitur. Poſtremò, ultima huius omnem figuram rectilineam irregularem vel etiam plures, ad quadratum æquale ſumma facilitate reducit; ut verè aureus dicendus hic liber mole perexiguus, fructu immenſus.

Digitized by Google

DEFINITIONES.

1. *Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub rectis duabus, quæ rectum angulum comprehendunt.*

2. *In omni parallelogrammo ſpatio, unumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius ſunt parallelogrammorum cum duobus complementis,* Gnomon *vocetur.*

Prop. I.

Si fuerint duæ rectæ, ſeceturq; ipſarum altera, in quotcunque ſegmenta; rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis, æquale eſt eis, quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, rectangulis.



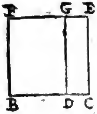
Sint rectæ A, C D, quarum C D ſecetur ad libitũ in F & H. Punctis C, D, erigantur perpendiculares C B, D E, æquales A connectatur B E, eritq; rectangulum B D, contentum ſub A ſiue B C, & C D *ex* 1. *defin.* Ex F & H, ducantur F G, H K parallelæ C B; erunt & inter ſe parallelæ *per* 30. 1. & per conſequens æquales. Tria ergo parallelogramma B F, G H, K D, rectangula erunt *per* 29. 1. & cum æqualia ſint toti rectangulo B D, perſpicuum eſt comprehenſum ſub A, & C D, æquale eſſe rectangulis omnibus quæ ſub A, & ſegmentis C F, F H, H D comprehenduntur.

Prop. II.

Si recta, ſecta ſit utcunque; rectangula quæ ſub tota & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, æqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato.

Super recta B C, ſecta utcunque in D, quadratum B E collocetur,

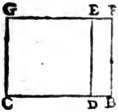
Digitized by Google



locetur, puncto D excitetur ad angulos rectos D G, ut æqualis & parallela ſit B F; eruntq; rectangula duo B G, D E *per* 34. 1. quæ cum æqualia ſint quadrato F C, perſpicuum eſt rectangula comprehenſa ſub B C & ſegmentis B D, D C, æqualia eſſe quadrato totius B C.

Prop. III.

Si recta, ſecta ſit utcunque; rectangulum ſub tota & uno ſegmentorum comprehenſum, æquale eſt illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto ſegmento deſcribitur, quadrato.

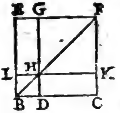


Recta C B, utcunque in D ſecetur, ſuper alterutro ſegmentorum (ſive id maius ſive minus fuerit) C D, quadratum C E, & ex B, B F parallela C G erigatur, donec cum G E in F protracta coëat. Cum igitur C G, rectæ C D æqualis ſit, *ex def. quadrati*, erit rectangulum C F ſub tota B C & ſegmento C D comprehenſum: & quia D E, eadem ratione æqualis eſt C D, erit rectangulum D F ſub C D, D B ſegmentis comprehenſum. Cum igitur rectangulum C F æquale ſit quadrato C E & rectangulo D F; euidens eſt, rectangulum ſub C B tota, & ſegmento C D comprehenſum, æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis C D, D B & quadrato dicti ſegmenti C D.

Prop. IV.

Si recta, ſecta ſit utcunque; quadratum quod à tota deſcribitur, æquale eſt illis, quæ à ſegmentis deſcribuntur, quadratis, & ei, quod bis ſub ſegmento comprehenditur, rectangulo.

Super B C, ſecta utcunque in D, quadratum C E erigatur,



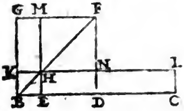
& D G parallela & æqualis ſit B E. ducatur B F diameter, puncto interſectionis H ducatur L K, parallela & æqualis BC. Liquido conſtat, quadrata ſegmentorum B D (nempe L D) & D C (nempe G K quadratum) cum rectangulo ſub B D, D C comprehenſo bis ſumpto (hoc eſt, E H, H C rectangula) efficere totum quadratum E C: quare totius B C, quadratum C E, æquale eſt quadratis ſegmentorum B D, D C & rectangulo comprehenſo ſub eiſdem ſegmentis bis ſumpto.

Corollarium.

Hinc liquet in quadratis ſpacijs, parallelogramma circa diametrum, eſſe quadrata.

Prop. V.

Si recta, ſecetur in æqualia & non æqualia; rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, una cum quadrato, quod ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei, quod à dimidia deſcribitur quadrato.



Recta B C, ſecta æqualiter in D, & inæqualiter in E; fiat rectangulum E L, ſub inæqualibus ſegmentis E C, B E comprehenſum. Sit etiam quadratum ſuper B D erectum, ducta diametro B F, ducaturque E H M, parallela B G, ſecans diametrum in H, & protrahatur L H in K. Quoniam ergò E K, N M quadrata ſunt *per corollarium præcedentis*, complementa G H, E N æqualia ſunt per 43. 1. Si addatur commune quadratum K E, erit parallelogrammum G E parallelogrammo B N æquale. *per* 36. 1. Igitur G E, D L æqualia inter ſe erunt: quibus ſi commune E N apponatur, erit gnomon M B N rectangulo E L æqualis. Quocirca cùm gnomon

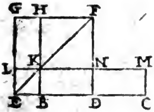
& qua-

Digitized by Google

& quadratum N M æqualia ſint quadrato D G *per* 4. erit & rectangulum E L una cum quadrato M N intermediæ E D, eidem quadrato G D æquale.

Prop. VI.

Si recta æquibiſecetur, & illi recta quædam in directum adijciatur; rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta, & adiecta, una cum quadrato à dimidia; æquale eſt quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab una deſcripto.



Recta B C, æquibiſecetur in D, directè ei recta E B apponatur. Rectangulum E M fiat, comprehenſum ſub tota compoſita [hoc eſt E C] & adiecta E B [id eſt E L:] ſit etiam quadratum G D erectum ſuper E D, & ducatur B H parallela & æqualis E G, & diameter E F. Quoniam *per conſtructionem*, B D æqualis eſt L G [hoc eſt, K H, aut K N:] evidens eſt, quod H N, quadratum ſit, quod cum E M rectangulo, quadrato D G æquatur; quare & rectangulum G K æquale eſt rectangulo K D, [hoc eſt D M] *per conſtructionem*.

Prop. VII.

Si recta ſecetur utcunque; quod à tota, quodque ab uno ſegmentorum, utraque ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quod bis ſub tota, & dicto ſegmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato.

Figura quartæ propoſitioni quæ apponitur, hinc quoq; pertinet.

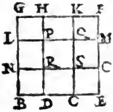
Secetur B C utcunque in D, rectangulum fiat B K ſub D C & B D comprehenſum, deſcribatur quadratum C E ſuper B C, ducatur D G parallela & æqualis B E, & diameter B F. Quoniam igitur gnomoni G B K, una cum quadrato

 GK, æquale

GK, æquale eſt quadratum CE *per* 4. ſi apponatur commune quadratum DL, erunt quadrata CE, DL, æqualia rectangulis LC, ED (quorum quodlibet comprehenditur ſub tota BC & ſegmento BD) una cum GK quadrato reliqui ſegmenti DC.

Prop. VIII.

Si recta ſecetur utcunque; rectangulum quater comprehenſum ſub tota, & uno ſegmentorum, cum eo, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato, æquale eſt ei, quod à tota, & dicto ſegmento, tanquam ab una recta deſcribitur, quadrato.



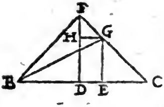
Secetur BC utcunque in D, apponatur directe CE æqualis BD. Super compoſita BE, quadratum EG erigatur, ducantur DH, CK parallelæ & æquales BG. Sint quoque EO, MF, æquales CE, [hoc eſt, BD] ducanturq; ON, ML parallelæ & æquales BE: Patet ergò quatuor rectangula BS, CM, FP, HN facta eſſe ex tota BC, & ſegmento BD; & quadratum SP, factum eſſe ex ſegmento altero DC: quæ quatuor rectangula una cum quadrato SP, cùm quadratum ſuper tota BC & adiecta CE erectum, componant; quadratum EG ſuper compoſita BE excitatum, quatuor rectangulis cum quadrato SP æquale erit.

Prop. IX.

Si recta ſecetur in æqualia, & non æqualia; quadrata, quæ ab inæqualibus totius ſegmentis fiunt, ſimul duplicia ſunt, & eius, quod à dimidia, & eius, quod ab intermedia ſectionum fit, quadrati.

Recta BC, ſecetur æqualiter in D, & inæqualiter in E, ad angulos rectos DF erecta, æqualis cum BD, ducantur FB, FC. Quo-

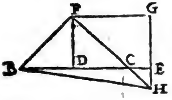
Digitized by Google



FC. Quoniam triangula BDF, CDF iſoſchelia ſunt, ad baſin anguli *per* 5. 1. æquales erunt. Sed BDF angulus rectus eſt, quemadmodũ & CDF. Ergò *per* 32. 1. angulus DBF ſemirectus erit, ut & DFB, DFC, DCF: qui cum DFB iuncti rectum efficient angulum BFC. Excitetur EG ad angulos rectos donec ſecet rectam FC in puncto G, à quo GH ducatur parallela & æqualis DE. Conſtat etiam GE æquari EC (angulo GEC recto exiſtente & ECG ſemirecto quemadmodum & EGC) *per* 6.1: eadem ratione HG, æqualis eſt HF: ducatur BG. Quoniam *per* 47.1. quadrata de BE, EC ſive EG, quadrato de BG æquantur; hoc verò quadratis de BF, FG: & quadratum de BF quadrati de BD duplum eſt; quadratum verò de FG duplum quadrati de HG ſive de DE: liquidò conſtat quadrata inæqualium ſegmentorum BE, EC ſimul ſumpta duplicia eſſe, & eius, quod à dimidia BD, & eius, quod ab intermedia ſectionum DE fit, quadrati.

Prop. x.

Si recta æquibiſecetur, adjiciatur autem ei in rectum, quæpiam recta; quod à tota, cum adiecta, & quod ab adiecta, utraque quadrata ſimul, duplicia ſunt, & eius, quod à dimidia, & eius, quod à compoſita ex dimidia & adiecta tanquam ab una recta, deſcriptum ſit, quadrati.



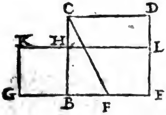
Recta BC æquibiſecetur in puncto D, à quo ad angulos rectos DF æqualis DB erigatur, & apponatur CE in directum rectæ BC. fiat rectangulum DG, & ducantur FB, FC. angulus BFC rectus eſt (utpote ex duobus ſemirectis compoſitus) *ut in præcedenti*. Protrahantur GE, FC, donec coëant in H. Erit

CEH trian-

CEH triangulum, rectangulum, & Iſoſchele: quia FCD ſemirectus eſt *per conſtructionem*; huic verò ECH æqualis eſt *per* 15.1. Sed CEH rectus eſt *per* 13.1. Ergò EHC ſemirectus *per* 32.1. qui & æqualis eſt GFH angulo. Ergo GF, GH æquales ſunt *per* 6.1. ducatur BH. Quia *per* 47.1. quadratum de BH, quadratis de BE, EH, ſive EC æquale eſt, & idem æquale quadratis de BF, FH; & quadratum de BF, duplum quadrati dimidiæ BD; & quadratum de FH duplum quadrati de FG (hoc eſt, DE, quæ dimidia eſt cum appoſita.) Quadratum totius & appoſitæ BE cum quadrato appoſitæ CE ſive EH duplum eſt quadratorum dimidiæ BD, & dimidiæ cum appoſita DE.

Prop. XI.

Datam rectam ſecare, ut comprehenſum ſub tota, & altero ſegmentorum rectangulum, æquale ſit ei, quod à reliquo ſegmento ſit, quadrato.



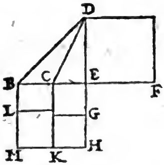
Data recta ſit BC ſuper qua quadratum BD erigatur, æquibiſecetur EB in F, ducatur FC. & extendatur EB ad G, donec FG, æqualis ſit FC: ſuper BG, quadratum BK deſcribatur, & KH extendatur in L. Quoniam rectangulum LG comprehenſum ſub tota BC & appoſita BG tanquam una recta EG, & appoſita BG ſive GK cum quadrato dimidiæ FB; quadrato de FG, [hoc eſt FC,] æquatur *per* 6. Quadratum verò de FC quadratis de FB, BC æquatur *per* 47.1. dempto communi quadrato FB, relinquetur rectangulum LG, æquale de BC quadrato BD: ablato rurſus communi rectangulo BL, remanebunt rectangulum DH, & quadratum HG inter ſe æqualia.

Prop. XII.

In ambligonijs triangulis quadratum quod ſit à latere angulum obtuſum

Digitized by Google

obtuſum ſubtendente, maius eſt quadratis quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo, & ab uno laterum quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab aſſumpta exterius linea, ſub perpendiculari prope angulum obtuſum.



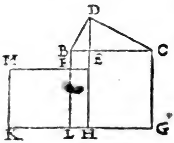
Sit ambligonium BCD, cuius C angulus obtuſus ſit, extendatur latus BC in E donec perpendicularem ex D cadentem excipiat. Quoniam de BD quadratum, quadratis DF, BH æquatur, & quadratum de CD, quadratis DF, CG æquatur *per* 47.1. euidens eſt, quadratum de BD, quadratis DF, CG, CL, quæ fiunt à lateribus DC, CB obtuſum angulum comprehendentibus, maius eſſe rectangulo bis comprehenſo [nempe KG, KL] & ab uno laterum [ut BC] quæ ſunt circa obtuſum angulum; in quod BC cum protractum fuerit in E, cadit perpendicularis DE, & ab aſſumpta exterius linea CE, ſub perpendiculari prope angulum obtuſum. Nam fiat quadratum BH, & ducatur perpendicularis CK, fiantque quadrata CL, CG: perſpicuum eſt, quod GH, æqualis ſit BC, & LM, CE. Rectangulum itaque KG lineis, BC, CE æqualibus comprehenditur, ut & KL.

Prop. XIII.

In oxygonijs triangulis, quadratum à latere angulum acutum ſubtendente, minus eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo & ab uno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſ-

Digitized by Google

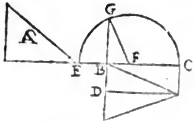
ſumpta interius linea ſub perpendiculari prope acutum angulum.



Oxygonium ſit BCD, ſubtendat BD angulum acutum C, ex D cadat perpendicularis DE ſuper BC, & quadratum BG ſuper eandem erigatur, extenſa DE in H fiat quadratum FE ſuper BE poſitum. Liquet *ex* 47.1. quadratū de BD, quadratis de DE, EB æquari. Sed quadratum de BC, nempe BG multo maius eſt quadrato de BE, [hoc eſt, EF] gnomone CHF; & quadratum de DC longè maius eſt, quadrato de DE; quadrato de EC, (hoc eſt FK, quod nos ponimus deſcriptum eſſe ſuper FL æquali EC.) Sed rectangulum EG comprehenſum eſt ſub CG ſive BC & EC, quæ inter angulum acutum C, & perpendicularem iacet. Eſt & alterum rectangulum MH ſub eiſdem lineis comprehenſum, cùm HL, æqualis ſit BE, & KL, LF & LF, EC *per conſtructionem*. Ergò & HK æqualis BC, & MK, EC. Quadratum itaque de BD minus eſt quadrato de BC, & de CD, duobus rectangulis EG, MH.

PROP. XIV.

Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.



Datum rectilineum A ſit, cui parallelogrammum in dato recto angulo æquale ponatur *per* 45.1. & ſit CD. extendatur CB in E, ita ut BE, BD æquales ſint, æquibiſecetur EC in F, à quo tanquam centro, ſemicirculus EGC deſcribatur & producatur DB donec incidat in circumferentiam, & ducatur GF. Quoniam igitur EC ſecta eſt æqualiter in F, & inæqualiter in B; rectangulum ſub CB, BE comprehenſum cum quadrato de BF, quadrato

drato de F E [aut de G F ſuo æquali] æquabitur *per* 5. Sed & quadratum de G F æquatur quadrato de G B & B F (angulo G B F per conſtructionem recto exiſtente) Euidens eſt rectangulum C D ſub C B, B E cum quadrato de B F æquale eſſe quadratis de G B, B F. Ablato quadrato communi de B F, rectangulum C D & quadratum de B G interſe æquabuntur.

FINIS SECVNDI.

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
TERTIVS.

Abſolutiſſimæ perfectiſſimæque figuræ proprietates & naturam explicat hic liber, quo etiam nomine reliquis duobus præferendus, cum *Scientiarum præſtantia ex ſubiectorum dignitate pendeat.* Vtilis ad chordarum arcuumque in circulis præciſionem, *cum quæ ſit angulorum, eadem quoque arcuum & chordarum inter ſe ratio.* Contactus & interſectiones duorum circulorum, item diametri aliarumque linearum in circulo ductarum, indolem exponit. Quomodo duo puncta in corpore ſolido oppoſita inveniantur, declarat. Inſtrumentorum Aſtronomiæ, alijſque artibus inſervientium, compoſitionem haud parum iuvat.

DEFINITIONES.

1. *Æquales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales, vel quorum, quæ ex centris, rectæ æquales ſunt.*
2. *Recta circulum trangere dicitur, quæ cum circulum tangat, ſi producatur, circulum non ſecat.*
3. *Circuli ſeſe mutuo tangere dicuntur; qui ſe mutuò tangentes, ſeſe mutuò non ſecant.*

4. *In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipſas cadunt, ſunt æquales. longius autem abeſſe illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.*

5. *Segmentum circuli figura eſt, quæ ſub recta & circuli peripheria comprehenditur.*

6. *Segmenti angulus eſt, qui ſub recta & arcu comprehenditur.*

7. *In ſegmento angulus eſt, cum in ſegmenti peripheria ſumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos eius rectæ, quæ ſegmenti baſis eſt, adiunctæ fuerint rectæ: is, inquam, angulus ab adiunctis illis rectis comprehenſus.*

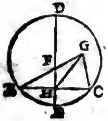
8. *Cum angulum comprehendentes rectæ lineæ aliquam aſſumunt peripheriam, illi angulus inſiſtere dicitur.*

9. *Sector circuli eſt, cum ad centrum eius conſtitutus fuerit angulus; comprehenſa nimirum figura, & à rectis angulum continentibus & à peripheria ab illis aſſumpta.*

10. *Similia circuli ſegmenta ſunt, quæ angulos capiunt æquales, aut in quibus anguli inter ſe ſunt æquales.*

Prop. I.

Dati circuli centrum invenire.



In circulo dato, recta B C ducatur, quà æquibiſecta in H, puncto ſectionis perpendicularis erigatur utrinque terminata in peripheria, quæ æquibiſecetur in F: ſi F centrum circuli non fuerit ponatur G eſſe, & ducantur G B, G H, G C. Quoniam ergò B H, C H inter ſe æquantur, &

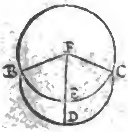
tur, & HG utrique communis eſt, & baſes BG, GC inter ſe æquales (utpote à centro ductæ) anguli quoque BHG, CHG æquales erunt *per* 8. 1. ideoque recti. Erat autem & angulus BHF *ex conſtructione* rectus. Igitur anguli BHF, BHG pars & totum æquales erunt, quod eſt abſurdum. Eſt ergo F verum circuli centrum.

Corollarium.

Si recta rectam ad angulos rectos in circulo æquibiſecet, in ſecante centrum erit circuli.

Prop. II.

Si in circuli peripheria duo quælibet puncta ſumpta fuerint, recta quæ ad ipſa adiungitur, intra circulum cadet.

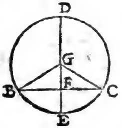


Quælibet puncta B, C in circuli dati peripheria ſumantur, ſi ex B in C ducta recta non cadit intra circulum, extra cadat, & ſit BDC. Invento F centro *per* 1. ducantur FB, FC & FD quæ ſecet circumferentiam in E. Quoniam ergò FB, FC latera æqualia ſunt, cum à centro ducantur, anguli *per* 5.1. FBD, FCD æquales erunt. Eſt autem FDB, angulo FCD maior *per* 16.1. Igitur & FBD angulo, maior erit idem FDB angulus. Quare recta FB maiori angulo FDB oppoſita, [hoc eſt, recta FE ſibi æqualis] maior erit *per* 19.1. quàm recta FD minori angulo DBF oppoſita, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Non ergo recta ex B in C ducta, extra circulum cadet, ſed intra.

Prop. III.

Si in circulo recta quædam per centrum extenſa, quandam non per centrum extenſam æquibiſecet; & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecat, eam quoque æquibiſecabit.

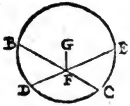
In circulo recta DE per centrum G extenſa, rectam BC



non per centrum extenſam æquibiſecet in F, ducanturq; G B, G C. Quoniam duo triangula æquiangula ſunt, ergò & G F C, G F B anguli æquales, & per conſequens recti. Sit deinde B C, rectâ D F ſecta ad angulos rectos. Quoniam ad baſin anguli B & C ſunt æquales, & G F C, G F B quoque *per hypotheſin*, & latera G B, G C ſunt æqualia; Etiam reliquus angulus reliquo angulo æqualis erit & latera lateribus *per* 26. 1. quare & B F, F C æquales.

Prop. IV.

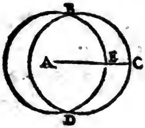
Si in circulo duæ ſe rectæ mutuò interſecent, non per centrum extenſæ; ſeſe mutuo non æquibiſecabunt.



Rectæ B C, D E in circulo ſeſe mutuò ſecent in F. centro G ducatur G F. Quia ergò ponitur G F rectam B C æquibiſecare in F, ſecabit eam ad angulos rectos *per* 3. Eadem ratione D E ſecabitur, cum ponatur æquibiſecari in F: Quare rectus angulus G F E, recto angulo G F C æqualis erit, pars toti, quod eſt abſurdum.

Prop. V.

Si duo circuli ſeſe mutuò ſecent, non erit illorum idem centrum.



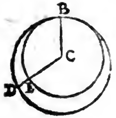
Duo ſe mutuò circuli ſecent in B & D: ſi A centrum eſt amborum, ducatur AB, AE, A C: erunt ergò tres illæ rectæ *per* 15. *def.* 1. æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum.

Prop.

Digitized by Google

Prop. VI.

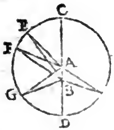
Si duo circuli ſeſe mutuò interius tangant, eorum non erit idem centrum.



Tangant ſe circuli interius in B; ſi C utriuſque centrum fuerit, ductæ CB, CE, CD, æquales erunt, pars & totum, qnod eſt abſurdum.

Prop. VII.

Si in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ cadant; maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima verò reliqua; aliarum verò propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper maior eſt. Duæ autem ſolùm rectæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt ad utraſque partes minimæ vel maximæ.



In diametro CD, cuiùs centrum A ſit, ſumatur punctum quodcunque B, præter centrum, à quo cadant in circumferentiam quotcumque lineæ BE, BF, BG, ducanturque ſemidiametri AE, AF, AG. Quia duo latera AE, AB, latere BE maiora ſunt *per* 20. 1. BC verò duobus illis æqualis eſt; erit BC maior quàm BE & quàm BF, vel BG vel BD. Quare BC maxima eſt omnium quæ ex B in peripheriam cadunt, cum perpetuo æqualis ſit duobus trianguli lateribus. Deinde, quia latus GA duobus lateribs BA, BG minus eſt, GA verò AD æqualis; erit quoque AD minor duobus BA, BG. Communi BA dempta, remanebit adhuc BD minor quàm BG, & quàm BF, BE, BC. Quare BD minima omnium

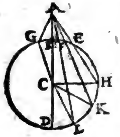
eſt quæ

Digitized by Google

eſt quæ ex B in circumferentiam cadunt. Rurſus, cum E A, *a b* æquentur F A *a b*, angulus verò E A B angulo F A B maior eſt; baſis quoque E B baſi F B maior erit *per* 24.1. & ſic conſequenter F B, maior G B.&c. Fiat angulo B A G, altera parte, angulus B A H æqualis ducta B H. Quia anguli æquales ſunt,& latera circa æquales angulos æqualia, rectæ G B, H B inter ſe æquales ſunt *per* 4.1. ex utraque parte linæ minimæ B D, vel maximæ B C. Iam ſi ex B ſupra H recta cadat, maior erit quam B H, quia maximæ B C vicinior eſt: ſi infra, minor: quia remotior eſt à maxima, & vicinior minimæ ut oſtenſum eſt. Nulla itaque alia ab eodem puncto B ducta his B G, B H æqualis eſſe poterit, quare ſolæ illæ æquales fuerint.

Prop. VIII.

Si extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum quædam rectæ ducantur, quarum una quidem per centrum tranſeat, reliquæ verò ut libet: in peripheriam cavam cadentium rectarum maxima eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt: in convexam verò peripheriam cadentium rectarum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum & diametrum interponitur; aliarum autem, ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantum rectæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad utraſque partes minimæ vel maximæ.

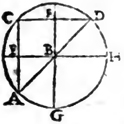


Puncto A extra circulum, lineæ circulum ſecantes ducantur, quarum A D per C centrum tranſeat, reliquæ A L, A K, A H, utcunque; ducantur etiam ſemidiametri C I, C F, C E, C H, C K, C L. Quoniam igitur duabus C A, C L æqualis

æqualis AD eſt, maior erit AL recta, *per* 20.1. Et quia *ac*, CL æquantur *ca* CK; angulus verò ACL angulo ACK maior eſt; baſis quoque AL baſi AK maior erit *per* 24.1. & ſic de reliquis. Rurſus quia AI, CI, ſunt AC maiores; ablatis CB, CI æqualibus, relinquetur AB minor quam AI; & ſic AF quàm AE. Et quia intra triangulum AFC duæ rectæ IA, IC ab extremitatibus lateris AC ducuntur, quæ minores ſunt, quàm FA, FC *per* 21.1. æqualibus CI, CF demptis, relinquetur AI minor quàm AF, ita quoque de cæteris. Poſtremò ACI angulo, ACG angulus æqualis ponatur, ducta GA. Quia anguli & latera æqualia ſunt, baſes quoque AI, AG æquabuntur: nec aliæ duæ rectæ his æquales poni poſſunt, remotiores enim longiores; viciniores, breviores erunt, ut demonſtratum eſt.

PROP. IX.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, ab eoque puncto ad circulum cadant plures quam duæ rectæ æquales; acceptum punctum centrum eſt ipſius circuli.

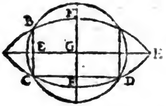


A puncto accepto B plures rectæ, BA, BC, BD, æquales inter ſe in circumferentiam cadant: ducta CD æquibiſecetur in F. Quoniam duo triangula BFD, BFC æquiangula & rectangula ſunt, *per* 8.1. recta FG ſuper CD, ad angulos rectos collocata erit, & in eadem FG centrum erit circuli *per* 3: & æquibiſecta AC, ducta EBH, continebit in ſe centrum circuli. Iam quia B commune interſectionis punctum rectarum FG, FH eſt, erit & B centrum circuli.

PROP. X.

Circulus circulum in pluribus, quàm duobus, punctis non ſecat.

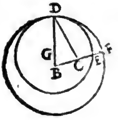
Duæ ſe peripheriæ in tribus (ſi fieri poteſt) punctis BCD



ſecent, ductæ C B, C D æquibiſecentur in E & F, è quibus perpendiculares erecti F K, E H. communis ſectio G centrum erit duarum circumferentiarum ſe ſecantium, quod eſt contra 5.

Prop. XI.

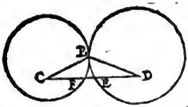
Si duo circuli ſeſe intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta & producta, in contactum circulorum cadet.



Duo ſe circuli interius puncto D tangant; B centro maioris, B D ducatur. Si in hac recta minoris centrum non fuerit, ponatur eſſe in C, ducaturque B C E F, erunt C E, C D æquales; & C D, C B æquales E C, B C. Sed D C, B C maiores ſunt, quàm D B, *per* 20.1. B E ergò maior, quàm B D fuerit: hoc verò falſum eſt: quia B E pars de B F, quæ æqualis eſt B D; procedunt enim ab eodem centro B, & ſecant eandem circumferentiam D F *per conſtructionem*.

Prop. XII.

Si duo ſe circuli exterius contingant, recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum tranſibit.



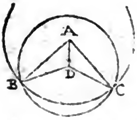
Tangant ſe circuli in B, ſi recta, quæ eorum centra iungit, non tranſit per B, ſit C D, ducatur C B, D B, quæ cum maiores ſint, quam C D *per* 20.1. [ſunt autem rectæ C B, C E, & D B, D F (cum C & D ponantur centra circulorum) æquales] erunt & rectæ E C, F D maiores quàm tota recta C D, quod manifeſtè falſum eſt.

Prop.

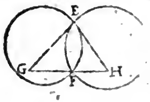
Digitized by Google

PROP. XIII.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm vno, ſive intus, ſive extra trangat.



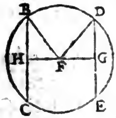
Si duo ſe circuli tangant interius in duobus punctis (ſi fieri poteſt) B, C, non habebunt idem centrum *per* 5. ſint ergò centra A, D, ductâ AD, quæ producta in punctum contactus B cadet *per* 11. ducatur & AC qnæ æqualis ſit AB, & DC æqualis DB, à communi centro D ductæ. Quia ergò DB, DC æquales ſunt, & AD communis, erunt æquales rectæ AC contra 20.1.



Si exterius ſe tangant duo circuli in E & F illorumque centra GH fuerint; tranſibit GH per contactum E; atque per F, *per* 12. Erit ergò GEH æqualis GH contra 20.1.

PROP. XIV.

In circulo æquales rectæ æqualiter diſtant à centro. Et quæ æqualiter diſtant à centro, æquales ſunt inter ſe.

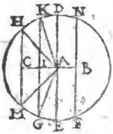


In circulo cuius centrum F ſit, æquales rectæ BC, DE ducantur: cadant perpendiculares FH, FG ex F, quæ rectas BC, DE in partes æquales ſecabunt *per* 3. ducantur etiam FB, FD. Quoniam *per* 47.1. quadrata de BF, *d f* quadratis de BH, FH, & de *dg, fg* æquantur: duobus æqualibus de BH, DG ablatis relinquentur æqualia quadrata de FH, FG: æqualiter ergò HF, GF diſtant à centro *per* 4. *defin.*

Digitized by Google

Prop. xv.

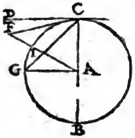
In circulo, maxima quidem linea eſt diameter: aliarum autem propinquior centro, remotiore ſemper maior.



Sit DE diameter, centrum A, cui vicinior ſit NF, remotior MH. ducantur perpendiculares AB, AC. quia MH remotior eſt à centro, quàm NF, erit AB minor, quàm AC *per* 4. *def.* à qua AI æqualis AB abſcindatur, atque per I educatur perpendicularis KG quæ NF æqualis eſt *per* 14. connectantur AK, AM, AG, AH. Quoniam AG, AK maiores ſunt quàm GK *per* 20.1. æquales autem diametro: erit diameter DE maior quàm GK, & ſic de cæteris. Et quia latera AK, AG, lateribus AM, AH æqualia ſunt, & KAG angulus MAH angulo maior eſt: erit KG maior quàm MH *per* 24.1. atque ideo NF, æqualis KG maior quoque erit, quàm MH.

Prop. xvi.

Quæ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam, & peripheriam comprehenſum, altera recta non cadet: & ſemicirculi angulus, quovis acuto rectilineo maior eſt, reliquus autem minor.



Sit A centrum, BC diameter, ad C erigatur perpendicularis: quæ ſi intra circulum cadat ut GC, ducta GA erunt ACG, AGC anguli æquales *per* 5.1. Sed ACG rectus eſt. Ergò & AGC contra 17.1. non ergò cadet intra circulum, ſed extra, qualis eſt DC. Deinde, ſi inter DC & circumferentiam, ex C recta cadat EC, centro A perpendicularis agatur AF, ſecans circum-

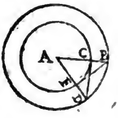
circumferentiam in I, angulo A F C recto exiſtente, A C, [hoc eſt, A I, ei æqualis] maior quàm A F fuerit *per* 19. 1. pars quàm totum. non ergò cadet recta alia inter D C & peripheriam. Patet igitur angulum [corniculárem dictum] ſub diametro & peripheria comprehenſum maiorem eſſe quovis acutō rectilineo: & alterum inter tangentem D C & circumferentiam contentum quovis acuto minorem eſſe.

Corollarium.

Recta circulum tangens in unico illo extremo diametri puncto tangit.

Prop. XVII.

A dato puncto rectam ducere, quæ datum tangat circulum.

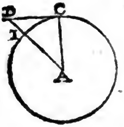


Punctum datum B ſit, circulus C E, centro A ducatur A B, ſecans peripheriam in C. centro A intervallo A B, circulus B D deſcribatur. puncto C ad angulos rectos C D erigatur, incidens in circumferentiam, iunganturque A D, E B. Quia ergò duò latera B A, *e a* duobus A D, *c d* æquantur, angulus verò A communis eſt, erunt baſes B E, C D æquales, & reliqui anguli reliquis angulis, nempe A C D, A E B. Sed A C D rectus eſt, & C D tangit circulum datum puncto C *per corol. prioris.* Ergò & A E B rectus eſt, & B E quoque circulum tangit, quod erat faciendum.

Prop. XVIII.

Si recta quæpiam circulum tangat, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam; quæ adiuncta fuerit, ad ipſam contingentem perpendicularis erit.

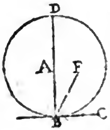
Tangat D C circulum in C, centro A ducatur A C. Si A C D angulus



angulus rectus non fuerit, erigatur alia, & ſit D A, ſuper D C ad angulos rectos. Quia ergò A D C angulus rectus eſt, A C, [hoc eſt, A I] maior fuerit quàm A D *per* 19. 1. pars toto, quod eſt abſurdum.

Prop. XIX.

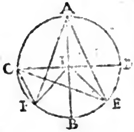
Si recta quæpiam circulum tetigerit, à contactu autem recta, ad angulos rectos ipſi tangenti excitetur, in excitata erit centrum circuli.



Si recta BC circulum in puncto B tangat, à quo B D perpendiculariter erigatur: quæ ſi centrùm non contineat, ſed in E fuerit, ducatur E B, quæ perpendicularis erit ad B C *per* 18. Ergò rectus angulus E B C recto A B C æqualis erit, pars toti, quod eſt abſurdum.

Prop. XX.

In circulo angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria baſis angulorum.

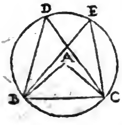


Super eadem baſi E F angulus ad centrum E I F ſit, angulus ad peripheriam E A F. Quoniam triangulum A I F iſoſcele eſt, & exterior angulus B I F æqualis eſt duobus I A F, I F A *per* 32. 1. erit B I F angulus duplus anguli I A F; & eadem de cauſa B I E angulus I A E anguli duplus. Totus ergò E I F totius E A F duplus erit. Sed ſi centrum extra lineas fuerit, & in angulo E C F ducatur C I D. Angulus externus D I F duobus internis I C F, I F C æqualis eſt; ergò & duplus anguli I C F. Sic & D I E angulus duobus I C E, I E C æqualis, duplus erit

erit anguli ICE. Si ergò duplus DIE à duplo DIF tollatur, & ſimplex ICF à ſimplici ICF; relinquetur EIF duplus reliqui ECF.

PROP. XXI.

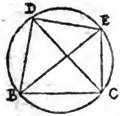
In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales.



Segmentum circuli ſit BDEC, anguli in eo ſint D & E connectantur BC, & centro A ducatur AB, AC, quia D angulus, dimidius A anguli eſt, & E eiuſdem A dimidius *per* 20. erunt D & E anguli inter ſe æquales *per* 7. *axiom.*

PROP. XXII.

Quadrilaterorum in circulis deſcriptorum anguli, qui ex adverſo, duobus rectis ſunt æquales.

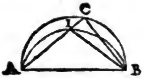


In circulo quadrilaterum BCED inſcribatur, ducanturque BE, CD. Anguli DBE, DCE æquales ſunt, & EBC, EDC cum ſint in eodem ſegmento *per* 21. Totus ergò DBC angulus, duobus CDE, ECD æqualis eſt: quare & totus DBC cum toto DEC angulo duobus rectis æquales erunt *per* 32.1. Eadem eſt de angulis BDE, BCE demonſtratio.

PROP. XXIII.

Super eadem rectâ, duo circulorum ſegmenta ſimilia, & inæqualia, non conſtituentur ad eaſdem partes.

Super eadem recta AB ſimilia & inæqualia [ſi fieri poteſt] circulo-



circulorum ſegmenta AIB, ACB conſtituantur, ducaturque AC interiorem circumferentiam ſecans in I & connectantur BC, BI. Anguli C & I æquales erunt *per* 10. *defi.* quod eſt contra 16. 1.

PROP. XXIV.

Super æqualibus rectis, ſimilia circulorum ſegmenta, ſunt inter ſe æqualia.



Super rectis AB, EB æqualibus conſtituta ſint æqualium circulorũ ſegmenta ACB, EDB; Anguli C & D æquales erunt *per* 21. Et ſuper EB ſimile aliud ſegmentum EIB [ſi fieri poteſt] ponatur; puncto I quo interſecatur circumferentia EIB rectâ BD; ducatur FI. Quia ſectiones ſimiles ſunt, angulus I angulo C æqualis erit ergò & angulo D, quod eſt contra 16. 1.

PROP. XXV.

Circuli ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.



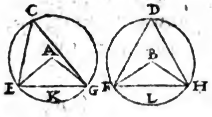
Segmentum datum BDC ſit, in quo duæ quæcunque lineæ, ut BD, CD, utcunque ducantur non parallelæ, quæ æquibiſecentur in puncto E & F, è quibus perpendiculares EG, FG erigantur. Patet *per* 1. centrum in duobus illis perpendicularibus eſſe, nempe in puncto communi G. Poterit ergò ex centro G intervallo CG circulus perfici, cuius BDC datum ſit ſegmentum.

PROP. XXVI.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt,

Digitized by Google

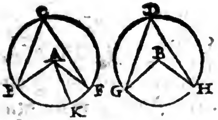
inſiſtunt, ſive ad centra, ſive ad periphe. inſiſtant.



Duo circuli æquales ſint,& ad centra A, B, & ad circumferentias C, D, inter ſe anguli æquales ſint. AE, *ag* lineis BF *bh* æquales, angulos comprehendentes æquales, ſunt; æquales ergò erunt rectæ EG, FH *per* 4.1. Deinde quia C, D, anguli æquales ſunt *per* 20. ſegmenta circulorum ECG, FDH *per* 10. *defin.* ſimilia erunt. Sed ſegmenta ECG, FDH ſuper rectas æquales, EG, FH inter ſe æquales ſunt *per* 24: ſegmenta ergò reliqua ut & peripheriæ EKG, FLH æquales erunt.

PROP. XXVII.

In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs inſiſtunt inter ſe æquales, ſive ad centra, ſive ad peripherias conſtituti inſiſtant.



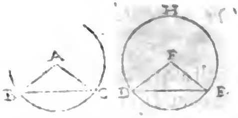
In æqualibus circulis æqualibusperipherijs EF, GH, anguli æquales C, D, inſiſtant. Si ad centrum angulus B, angulo EAF minor fuerit, reddatur hic ei æqualis *per* 23.1. ducta AK. Circumferentia ergò EK, circumferentiæ GH æqualis fuerit *per* 26: ſed ex hypotheſi EF æqualis erat GH. ergò EK æqualis erit EF, pars toti, quod eſt abſurdum; non ergò inæquales fuerint, ergò & horum ad centrum angulorum ſub dupli C, D *per* 20. æquales erunt *per* 7. *axiom.*

PROP. XXVIII.

In æqualibus circulis, æquales rectæ, æquales peripherias auferunt; maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

In æqualibus circulis duæ rectæ æquales BC, DE ſint, cen-

Digitized by Google



tris A, F, rectis AB, AC, FD, FE ductis, duo triangula æquiangula & æqualia erunt *per* 8.1. quare A, F anguli æquales; ergò & peripheriæ quibus inſiſtunt, æquales erunt *per* 26; quæ à totis æqualibus ablatæ, relinquuntur æquales BGC, DHE *per* 3.*axiom.*

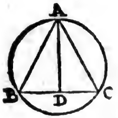
PROP. XXIX.

In æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ ſubtendunt. Vide ſchema præcedens.

In circulis & peripherijs æqualibus, duæ rectæ BC, DE ſubtendentes ponantur, ductis lineis ut prius. Quia latera AB *ac* lateribus FD *fe* æquantur: anguli verò A, F æquales *per* 27, baſes quoque BC, DE æquabuntur *per* 4.1.

PROP. XXX.

Datam peripheriam æquibiſecare.



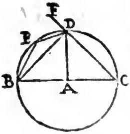
Peripheria ſit BAC. Ducatur BC quâ in D puncto æquibiſecta, ex quo perpendicularis DA erigatur, iungantur AB, AC, latera BA, *bd* lateribus CA, *dc* æquantur, & ad D anguli: baſes quoque AB, AC æquabuntur *per* 4.1. & propterea peripheriæ AB, AC æquales erunt *per* 28.

PROP. XXXI.

In circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto; qui verò in minore ſegmento, maior eſt recto. & inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt, minoris autem ſegmenti angulus, minor eſt recto.

In circulo cuius centrum A ſit, conſtituatur ſemicirculi angulus

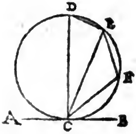
Digitized by Google



lus BDC. ducatur diameter BC. Sit in maiori ſegmento DCB angulus, in minori DEB angulus: angulus ex maiori ſegmento mixtus rectâ BD comprehendatur, & arcu DC; ex minori verò mixtus eadem BD comprehendatur, & arcu DE. Extendatur CD in F & ducatur AD. Quia anguli ACD, ADC *per* 5.1. æquales ſunt, quemadmodum & ABD, ADB anguli; totus BDC angulus æqualis erit DBC, DCB angulis, quibus duobus, externus FDE angulus æqualis eſt *per* 32.1. ſunt igitur BDF, BDC æquales & per conſequens recti *per* 10. *defi & 13 prop*.1. Deinde maioris ſegmenti angulus DCB minor recto eſt; figurarum verò quadrilaterarum circulo inſcriptarum, æquales ſunt oppoſiti anguli duobus rectis *per* 22. ergò BED angulus recto maior eſt. Poſtremò angulus mixtus BDC, rectum comprehendens recto maior eſt, & ex minori ſegmento mixtus BDE minor eſt, quàm FDB, quare & recto minor.

PROP. XXXII.

Si circulum tetigerit aliqua recta, à contactu autem producatur quædam recta circulum ſecans; anguli, quos ad contingentem facit, æquales ſunt ijs, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis.



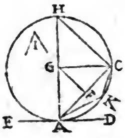
Recta AB, circulum in puncto C tangat, à quo CE circulum ſecans ducatur, erigatur CD ad angulos rectos, ductâ DE. Quia CED angulus rectus eſt *per* 31. ECD, EDC recto (hoc eſt BCD) angulo æquales erunt *per* 32.1. communi ECD ablato, qui in maiori ſegmento eſt EDC angulus, ECB æqualis relinquetur. Ducatur quoque FE, FC. Quia quadrilateri circulo inſcripti oppoſiti anguli, æquantur duobus

Digitized by Google

rectis *per* 22. anguli E D C *e f c* oppoſiti & inſiſtentes ſectionibus alternis, æquales erunt E C B, *e c a*, angulis. Sed E C B æqualis eſt oſtenſus E D C. Ergò E F C minoris ſegmenti, E C A æqualis erit.

Prop. XXXIII.

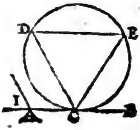
Super data recta, deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem, dato angulo rectilineo.



Data recta ſit A C, angulus verò datus I: ad punctum A, lineæ A C, angulus D A C, angulo I ponatur æqualis: D A excurrat in E, puncto A ad rectos angulos AH ſuper E D erigatur, æquibiſecetur A C in puncto F, à quo perpendicularis F G erigatur: connectantur G C. Quia triangulorum A F G, C F G latera & anguli inter ſe æquantur; baſes quoque A G, C G æquales erunt per 4.1. Centro G interuallo G C circulus deſcribatur, & connectantur H C. Erit ergò A H circuli diameter, cum rectæ E D ad angulos rectos inſiſtat, quæ & circulum in puncto unico tangit *per* 19. *&* 16. Iam *per* 32 DAC angulus CHA angulo æqualis eſt: maius ergò ſegmentum AHC angulum H comprehendit I dato æqualem. Si dati anguli complementum daretur, obtuſus E A C, æqualis oſtenderetur minoris ſegmenti angulo A K C. Si angulus poneretur rectus, ſemicirculus ſufficeret *per* 31.

Prop. XXXIV.

A dato circulo, ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

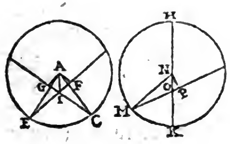


Circulus CDE, angulus I, recta AB circulum in C *per* 17 tangens, dantur. Super A B ad punctum contactus C ponatur D C A angulus, dato I æqualis; cui angulus E ſegmenti maioris D E C æqualis eſt *per* 32.

per 32. Si datus angulus D C B angulo æqualis poneretur, ſegmenti minoris D C angulus ei æqualis oſtenderetur.

PROP. XXXV.

Si in circulo duæ ſe rectæ mutuò ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis unius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo.



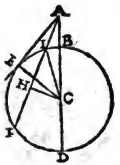
In circulo duæ ſe rectæ BC, DE multuò interſecent in I. centro A perpendiculares cadant A G, A F, ducanturque A E, A C, A I. Quoniam A G, A F rectas B C, D E in partes æquales ſecant *per* 3. A I verò in inæquales: Rectangulum ſub BI, I C comprehenſum cum quadrato de G I quadrato de G C æquabuntur *per* 5.11. ſed *per* 47. 1. de CG, GA quadrata, de CA quadrato æquantur. Rectangulum igitur ſub BI, IC, cum quadratis de GI, GA [hoc eſt, de IA quadrato] æquantur de AC quadrato. Ita quoque demonſtratur, ſub DI, IE rectangulum æquari quadrato de AE. Si commune de IA tollatur quadratum, rectangulum ſub ſegmentis unius, æquale erit rectangulo ſub ſegmentis alterius. Deinde ſi una tantum rectarum in circulo ductarum ſecetur inæqualiter, altera verò non, erit ſecta ad angulos rectos, & rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis, æquale erit quadrato de dimidia, ut colligitur *ex* 14.11. Poſtremò, ſi diameter HK, & altera recta LM ſe inæqualiter ſecent in O: rectangulum ſub HO, KO cum quadrato de ON æquale erit quadrato de NK, ſive NM; & rectangulum ſub LO, MO cum quadrato de OP, quadrato de PM æquale erit. Sed quadrata de PN, PO quadrato de NO æquantur. Rectangulum ergò ſub LO, MO cum quadrato de NO, æquale erit quadratis de PM, PN, [hoc eſt, quadrato de NM quod

 quadra-

quadrato de N K æquale eſt.] Si ergò commune quadratum de N O tollatur, duo rectangula ſub H O, K O & ſub L O, M O contenta, relinquuntur inter ſe æqualia.

Prop. XXXVI.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera verò tangat: quod ſub totâ ſecante, & exterius inter punctum, & convexam peripheriam aſſumptâ, comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato.

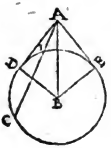


Extra circulum punctum A ſumatur, à quo candant rectæ duæ, quarum altera A D circulum ſecet tranſiens per centrum C; altera A E circulũ tangat. Quòniam itaque *per* 6.11, rectangulum ſub tota A D & appoſita A B contentum, cum quadrato de C B [ſive C E] dimidia, quadrato de dimidia & appoſita A C æquale eſt; & quadrata de A E, C E quadrato de eadem A C æqualia ſunt *per* 47.1. communi quadrato de E C [ſive C B] ablato, quadratum de A E, rectangulo ſub A D, A B contento æquale erit. Deinde ſi circulum ſecans recta A F per centrum non tranſeat, ſuper quàm ex centro perpendicularis cadat H C. Ergò F I ſecta eſt in partes æquales *per* 3. ducatur I C. Quoniam igitur *per* 6.11. rectangulum ſub A F, A I, cum quadtato de I H, quadrato de A H æquale eſt: cui commune quadratum de H C addatur. Iam ſub A F, A I contentum, cum quadrato de A H, C H [hoc eſt quadrato de I C] æquale eſt, quadrato de A H & C H [hoc eſt quadrato de A C.] Sed quadrata de A E, C E æqualia ſunt eidem quadrato de A C. Quadrata ergò de AE, CE æqualia ſunt rectangulo ſub A F, A I cum quadrato de C I, ſive

CI, [ſive CE] communi ablato, relinquentur quadratum de AE, & rectangulum ſub AF, AI inter ſe æqualia.

PROP. XXXVII.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ, quarum altera circulum ſecet, altera iu eum incidat; ſit autem, quod ſub totâ ſecante & exterius inter punctum & convexam peripheriam aſſumptâ, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur, quadrato; incidens ipſa circulum tanget.



Puncto A extra circulum cadant rectæ, quarum una AC circulum ſecet, altera AD tangat; centro B ducatur BA, BD, puncto A ducatur AE, quæ tanget circulum *per* 17, ducaturque BE. Quia ergò ex hypotheſi & *per* 36. rectangulum ſub AC, AI contentum qnadrato de AD æquale eſt, & *per eandem* idem rectangulum, quadrato de AE æquale eſt: Erunt ergò AD, AE inter ſe æquales. Itaque cum DA, *d b* lateribus EA, *e b* æqualia ſint, baſis verò communis, angulus ADB, angulo AEB recto æqualis erit *per* 8. 1. erit ergò & ipſe rectus, & AD circulum tanget in extremitate Diametri BD *per* 16.

FINIS.

Digitized by Google

EVCLIDIS ELEMENTORVM QVARTVS.

INſcriptio & circumſcriptio figurarũ rectilinearum, vel polygonarũ hoc libro proponitur. Docet enim quomodo una figura aliæ inſcribi vel circumſcribi debeat. Ex hoc, tanquam fonte, tabulæ illæ inſignes, *Sinuum, tangentium, ſecantium*, primum manarunt, quod & ſecunda commentarij noſtri pars haud obſcurè innuit, in qua ſingula latera figurarum circulo inſcriptibilium Geometrice in numeris inventa exhibebimus. Satis ergò hic liber *Matheſeos ſtudioſis* commendatus erit, quod tam utilis præclarique inventi occaſionem ſublimibus ingenijs præbuerit. Nihil dicam de ampliſſimo eius in propugnaculis, in fortalitijs extruendis uſu, quibus ſalus publica defenditur, aliena invadendi bona, ardor reprimitur, ſubditorum ſæpè furor coërcetur, ut ob id ars hæc *vinculi univerſi* nomine decoranda mihi videatur. Sed cum alia huius quàm præcedentium tractatio ſit, alijs quoque vocabulis utitur, quæ ſingula ob pleniorem ſequentium intellectum, definit.

DEFINITIONES.

1. *Figura rectilinea in figurâ rectilineâ inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli ſingula latera eius, in qua inſcribitur, tangunt.*
2. *Figura circum figuram deſcribitur, cum ſingula eius, quæ circumſcribitur, latera ſingulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.*
3. *Figura rectilinea in circulo inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.*
4. *Figura rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, cum ſingula*

Digitized by Google

gula latera eius, quæ circumſcribitur, circuli peripheriam tangunt.

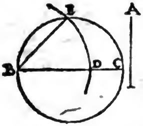
5. *Circulus in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingula tangit latera eius figuræ, cui inſcribitur.*

6. *Circulus circum figuram deſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingulos tangit eius figuræ, quam circumſcribit, angulos.*

7. *Recta in circulo accommodari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.*

PROP. I.

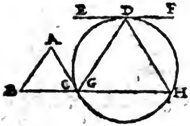
In dato circulo, rectam accommodare, datæ rectæ æqualem.



Data recta A ſit, quæ minor erit dati circuli diametro BC *per* 15. III. in quo aptari debet. auferatur à BC recta æqualis A *per* 3. I. ſitque BD, centro B intervallo BD deſcribatur circulus, datum circulum in E ſecans, ducaturque BE, quæ cum BD æqualis ſit *ex fabricâ*, hæc verò A æqualis; erit, & BE æqualis A, quam dato circulo accommodavimus.

PROP. II.

In dato circulo triangulum deſcribere, dato triangulo æquiangulum.



Circulus DGH, & triangulum ABC dantur. Recta EF ducatur circulum tangens puncto D, à quo ſuper DE ponatur angulus EDG, angulo B æqualis: fiat quoque FDH, angulo

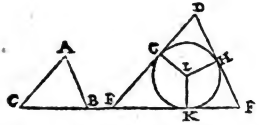
H C æqua-

Digitized by Google

C æqualis, ducaturque GH. Quoniam tres trianguli anguli duobus rectis æquales ſunt *per* 32.1. GDH, angulo A æqualis erit. Sed H angulus EDG angulo [id eſt B] æqualis eſt *per* 32.III. Ergò & G, angulo FDH [hoc eſt C] æqualis eſt. Triangulum itaque GDH, in dato circulo, dato triangulo æquiangulum poſuimus.

Prop. III.

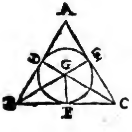
Circa datum circulum triangulum deſcribere, dato triangulo æquiangulum.



Dato triangulo ABC æquiangulum circumſcribendum ſit circulo dato, cuius centrum L in quo GLK, *klh* anguli, æquales C, *b* exterioribus triãguli angulis ponantur: extremitatibus G, H, K tres lineæ ED, FD, EF tangentes circulum ducantur. Quoniam quadrilaterum EGLK circulo inſcribi poteſt *per converſam* 22.III. angulis G & K oppoſitis, rectis exiſtentibus, & GLK æqualis factus eſt C angulo. Eſt ergò E angulus, ACB æqualis, cùm ille, cum exteriori duobus rectis æqualis ſit *per* 13.1. eodem modo reliqui anguli reliquis angulis oſtenduntur æquales.

Prop. IV.

In dato triangulo circulum inſcribere.



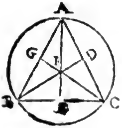
Dati trianguli ABC duo quicunque anguli B, C æquibiſecentur rectis quæ concurrant in puncto G, à quo in ſingula latera perpendiculares GD, GE, GF cadant, quæ æquales erunt *per* 4.1. cum quatuor triangulorum æqualium & æquiangulorum baſes exiſtant æquales. Si ergò ex G interuallo GD

Digitized by Google

in GD circulus ducatur, tanget latera trianguli *per* 16.III.

PROP. V.

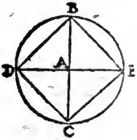
Circa datum triangulum circulum deſcribere.



Dati trianguli ABC latera BC, AC æquibiſſecentur in E, D ex quibus perpendiculares DF, EF erigantur, coëuntes in F, à quo tres rectæ FA, FB, FC ducantur. Duo triangula rectangula BEF, CEF æqualia ſunt & æquiangula *per* 4.I. ergò FB, FC æquales, & ob eandem rationem FA, FB. Si ergò ex F interuallo FB ducatur circulus, tranſibit per BCA puncta. idem fiet in omnibus rectangulis, ambligoniis, & oxygonijs.

PROP. VI.

In dato circulo quadratum deſcribere.



In dato circulo diametri BC, DE ductæ ſe interſecent ad angulos rectos in centro A; connectantur BE, CE, CD, BD. Quia quatuor triangula, rectangula, iſoſcelia, æquiangula, & æqualia ſunt, baſes quoque æquales ſunt *per* 4.I. æquilatera ergò figura BDCE eſt. Sed quivis ad baſin angulus ſemirectus eſt, ut DCA, ECA per conſtructionem. Totus ergò DCE rectus eſt, & ſic ſinguli bini auguli: eſt ergò BDCE quadratum, circulo inſcriptum.

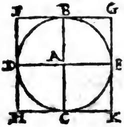
PROP. VII.

Circa datum circulum quadratum deſcribere.

Duæ ſe diametri BC, DE in centro A ſecent ad angulos rectos; ſingulis extremitatibus perpendiculares FG, FH,

H 2 KH,

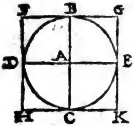
Digitized by Google



KH, KG erigantur. Quoniam ergò anguli ad A recti ſunt, quemadmodum & qui ad B, D, C, E: quatuor anguli F, H, K, G, recti erunt *per* 34.1. eſt verò figura æquilatera, cum ſingula latera diametro æqualia ſint. Quadratum ergò eſt FHKG circulo circumſcriptum.

Prop. VIII.

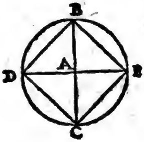
In dato quadrato circulum inſcribere.



Quadrati dati latera æquibiſecentur, ducanturque rectæ BC, DE, quæ ſe in A ſecent ad angulos rectos. Quoniam BC parallela eſt GK, ſive FH, & DE parallela HK *per* 34. 1. anguli qui ad F, H, K, G, ſunt, recti ſunt. Si ergò centro A, intervallo AB circulus deſcribatur, tanget quatuor quadrati latera punctis B, D, C, E *per* 16.111. circulus ergò inſcriptus eſt quadrato.

Prop. IX.

Circa datum quadratum, circulum deſcribere.



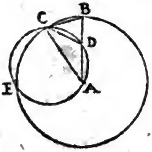
Diametri BC, DE decuſſatim ad angulos rectos ducantur. Quoniam duo triangula BDC, BEC Iſoſcelia æquiangula, & æqualia ſunt *per* 4.1. quivis angulorum qui ad baſin ſunt, ſemirectus eſt *per* 32.1.& rectæ AB, AC, AD, AE æquales. ſi centro A intervallo AB circulus ducatur, tranſibit per ſingulas dictarum linearum extremitates, & circumſcriptus erit quadrato.

Prop.

Digitized by Google

PROP. X.

Iſoſceles triangulum conſtituere, quod habeat utrumque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui.



Detur A B, quæ ſecta ſit in D *ex ſententia prop.* 11. 11. centro A intervallo AB circulus deſcribatur cui *per* 1. applicetur recta BC æqualis DA, ducanturque CD, CA. Triangulo ACD circumſcribatur circulus *per* 5. Quia ergo puncto B extra circulum recta BA circulum ſecat, & BC ſuper eundem cadit, & rectangalum ſub BA, BD, quadrato de DA (ſive de BC) æquale eſt: Recta BC circulũ DCEA tangit *per* 37.111. quare BCD angulus, A angulo in alterno ſegmento æqualis eſt *per* 32.111. Addatur communis DCA, duo anguli BCD, DCA duobus DAC, DCA æquales erunt. Sed externus angulus BDC æqualis eſt internis DAC, DCA *per* 32.1. Erit ergo idem toti BCA æqualis, & per conſequens angulo CBA, qui ei æqualis eſt, triangulo BAC iſoſcele exiſtente; & BC, DC æqualibus, cum angulos ſubtendant æquales. Sed BC æqualis ponebatur DA. Ergo DC eidem æqualis erit, & triangulum ADC iſoſcele, quare ad baſin angulus, BCA, duplus erit, anguli A, & eiuſdem duplus erit CBA angulus.

PROP. XI.

In dato circulo, pentagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.



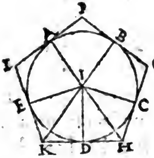
Conſtituatur triangulum iſoſceles *ex ſententia prop.* 10. circulo dato inſcribatur *per* 2. anguli B, C, ad baſin BC æquibiſecentur lineis in circumferentiam excurrentibus BD, CF: ducanturque BF, EF, ED, CD, CB.

Digitized by Google

CD, CB, anguli omnes CBD, DBE, ECF, FCB, BEC ſunt æquales *per* 21. & 26. III. Quinque ergo anguli ſegmentis inſiſtunt, quæ totum circuli ambitum comprehendunt. Pentagonum igitur BCDEF, æquilaterum & æquiangulum eſt.

Prop. XII.

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

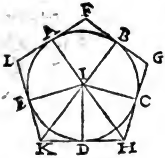


Circuli dati centro I, in ſingula peripheriæ puncta quæ penthagoni angulos circulo inſcripti exhibent *per* 11. ducantur ſemidiametri IA, IB, IC, ID, IE, ad quarum extremitates, ad angulos rectos, lineæ LF, FG, GH, HK, KL, ducantur, tangentes circulum & ducantur IK, IH. Quia latus EI lateri DI æquale eſt & IEK, angulo IDK, qui *per conſtructionem* rectus eſt: Quadratum de IK, æquatur quadratis de IE, EK, quemadmodum quoque quadratis de ID, KD. *per* 47.1. Sed angulus EID angulo DIC æqualis eſt [comprehendunt enim arcus æquales *per conſtructionem*] Quadrilaterum itaque EIDK, æquiangulum & æquale eſt quadrilatero DICH, dimidia dimidijs, & lineæ lineis. Quare KD æqualis DH, & DH, æqualis HC & ſic de reliquis. Eſt itaque pentagonum circulo circumſcriptum.

Prop. XIII.

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribere.

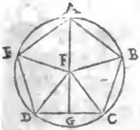
Pentagonum datum ſit FGHKL, anguli æquibiſecentur, lineis tranſeuntibus per centrum I, à quo cadant in ſingula penta-



pentagoni latera perpendiculares qui æquales erunt. Circulus itaque centro I, intervallo IA deſcriptus, per extremitates perpendiculorum tranſibit, dati pentagoni latera trangens *per* 16.III.

Prop. XIV.

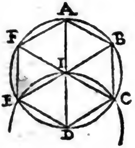
Circa datum pentagonum, æquilaterum & æquiangulum circulum deſcribere.



Datum pentagonum ſit ABCDE, æquilaterum & æquiangulum, cuius centrum inuenietur *ut in* 13 à quo in ſingulos angulos cadentes recte æquales erunt, ut demonſtratur *prop.* 12. centro F & intervallo alicuius rectæ angulum æquibiſecantis, circulus ducatur, qui tranſibit per linearum ductarum extremitates, & per conſequens per extremitates angulorum pentagoni. Circulus ergo pentagono circumſcriptus eſt.

Prop. XV.

In dato circulo, hexagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.



Circuli dati centrum I, ſit, diameter AID: ducatur puncto D intervallo DI circulus [qui alteri æqualis eſt, cum idem capiat intervallum] ducantur EI, CI in circumferentiam B & F, & lineæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, *per*.1. poſt: I. Duo triangula EID, DIC, ſunt æqualia, æquiangula & æquilatera: & omnia ſex triangula iſoſcelia ſunt, latera habentia æqualia *per* 15. *def*.1. & tres cuiuſvis trianguli anguli, duobus

Digitized by Google

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
QVINTVS.

HActenus Euclides de quantitate continua abſolute conſiderata egit; nunc vero duobus ſequentibus, de eadem non abſolute diſputat, ſed prout una ad aliam referatur, id eſt quatenus comparata cum alia, proportionem aliquam habet: Hoc quidem quinto libro *Proportiones* in genere, non deſcendendo ad ullam quantitatis ſpeciem, ut ad lineam, ſuperficiem, vel corpus aliquod, preclaro inſtituto perſequitur. Communis enim hic liber eſt plurimis artibus & ſcientijs. Magna eius in *Muſica, Aſtronomia; Iſoropica, Perſpectiva; & Arithmetica* vis eſt. Tantum *revolutiones mundi, mutationes imperiorum, miracula naturæ,* cum hac *proportionum* doctrina cummercium habent, ut Philoſophus, hac arte inſtructus, plurima ſollerti ingenio quaſi Numine tactus, ex abyſſo naturæ arcana eruere poſſit, nec errori inuoluetur, niſi cum auctor ille & conditor rerum Deus, potenti vi ſua, Naturæ ordinem immutat.

DEFINITIONES.

1. *Pars eſt magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.*
2. *Multiplex eſt maior minoris, cum minor metitur maiorem.*
3. *Ratio, eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis, mutua quædam, ſecundum quantitatem, habitudo.*
4. *Proportio, eſt rationum ſimilitudo.*
5. *Rationem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ poſſunt miltiplicatæ ſeſe mutuo ſuperare.*
6. *In eadem ratione magnitudines dicuntur eſſe, Prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum primæ & ter-*

tiæ æque multiplicia, à ſecundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiſcumque ſit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque, vel una deficiunt, vel una æqualia ſunt, vel una excedunt; ſi ea ſumantur quæ inter ſe reſpondent.

7. *Eandem habentes rationem magnitudines*, proportionales *vocentur.*

8. *Cum æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundæ, at multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ; tunc prima ad ſecundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.*

9. *Proportio in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit.*

10. *Cum tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: & ſemper deinceps, uno ampli⁹, quã diu proportio extiterit.*

11. *Homologæ, ſeu ſimiles ratione magnitudines, dicuntur antecedentes antecedentibus, conſequentes conſequentibus.*

[Sint quatuor magnitudines A.B.C.D: A ad B ut C ad D. hîc AC vocantur antecedentes, B & D conſequentes.]

12. *Alterna ratio, eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem; & conſequentis ad conſequentem.*

13. *Inverſa ratio, eſt ſumptio conſequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad conſequentem.*

14. *Com-*

Digitized by Google

14. *Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis cum conſequente, ceu unius ad ipſam conſequentem.*

15. *Diviſio rationis eſt ſumptio exceſſus, quo conſequentem ſuperat antecedens, ad ipſam conſequentem.*

16. *Converſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo ſuperat antecedens ipſam conſequentem.*

17. *Ex æqualitate ratio eſt, ſi plures duabus ſint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ ſumantur & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ſic & in ſecundis magnitudinibus prima ad ultimam ſeſe habuerit.* vel aliter *ſumptio extremorum, per ſubductionem mediorum.*

18. *Ordinata proportio eſt, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem; fuerrit etiam ut conſequens ad aliud quidpiam, ita conſequens ad aliud quidpiam.*

19. *Perturbata proportio eſt, cum tribus poſitis magnitudinibus, & alijs, quæ ſint his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: ut autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic inſecundis magnitudinibus aliud quidpiam, ad antecedentem.*

Operæpretium putabam, duodecim præcedentes propoſitiones ſolummodo interpretari, demonſtratione omiſſa, ne verborum Labyrintus cuiquam negotium faceſſeret.

Digitized by Google

PROP. I.

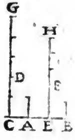
Si ſint quotcunque magnitudines, quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum, æquè multiplices; quam multiplex eſt unius una magnitudo, tam multiplices erunt & omnesomnium.



Sint propoſitæ magnitudines A,B,C,D, ſi prima tertiam ter contineat & ſecunda quartam ter quoque recipiat; duæ priores A & B iunctæ tertiam & quartam iunctas, toties continebunt, & erunt ut tria ad unum.

PROP. II.

Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex, atque ſexta quartæ: erit & compoſita prima cum quinta ſecundæ æquè multiplex, atque tertia cum ſexta quartæ.

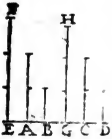


Prima CD, toties ſecundam A contineat quoties tertia EF, quartam B; & quinta DG, toties ſecundam A quoties ſexta FH, quartam B continet: Compoſitæ CG, ex prima & quinta, toties ſecundam A continebit, quoties EH, ex tertia & ſexta compoſita, quartam B continet.

PROP. III.

Si ſit prima ſecundæ æque multiplex, atque tertia quartæ; ſumantur autem æquè multiplices primæ & tertiæ: erit & ex æquo, ſumptarum utraque utriuſque æquè multiplex; altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ.

Si prima A ſecundam B toties continet, quoties C tertia, D quar-



D quartam; & EF toties primam, quoties GH tertiam: Etiam EF, ſecundam B, toties comprehendet, quoties GH quartam D.

PROP. IV.

Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: etiam æquè multiplices primæ & tertiæ, ad æquè multiplices ſecundæ & quartæ, iuxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ſi, prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.



Si prima A, ad ſecundam B, eandem rationem habuerit, quam tertia C, ad quartam D; toties vero E, contineat A, quoties F, continet C: & G, toties B, quoties H, comprehendit D. Erit E, ad G, ut F ad H.

PROP. V.

Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, ut tota totius.



Si tota AB, totam CD toties contineat, quoties ablata AE, ablatam CF; etiam reliqua EB, reliquam FD toties continebit, quoties tota totam.

PROP. VI.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multi-

Digitized by Google

plices; & detracta quædam ſint earundem æque multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æque ipſarum multiplices.



Si AB, toties G contineat, quoties DC continet H; ablata vero BE, continet G toties, quoties DF ablata, H. reliquæ magnitudines EA, FC, æquales erunt G & H magnitudinibus. Et ſi ablata EA, toties G continet, quoties CF ablata, H. reliqua EB. toties G comprehendet, quoties reliqua FD, contineat H.

Prop. VII.

Æquales magnitudines ad eandem, eandem habent rationem; & eadem ad æquales.



Si magnitudo A magnitudini B æqualis ſit, A ad C eandem rationem habebit, quam B ad C; & C, quoque eandem ad A, quam ad B.

Prop. VIII.

Inæqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: & eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.



Duarum magnitudinem C maior, B minor, & tertia quevis A; habebit C ad A maiorem rationem quam B ad A. Et è converſo maior erit ratio A ad B quam A ad C: hoc eſt longe maior erit C, reſpectu A quam B, reſpectu A.

Prop. IX.

Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales ſunt inter ſe: &

ſe: & ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque ſunt inter ſe æquales.



Si A ad C, eandem rationem habuerit, quam B ad C; erunt A, & B, æquales interſe. Et ſi C, eandem ſervat rationem ad A, quam ad B, erunt quoque A & B, inter ſe æquales.

Prop. x.

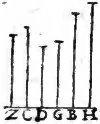
Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt: ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt.



Si B reſpectu C maior fuerit quam A, eiuſdem C reſpectu, maior multo B fuerit quam A: & ſi C reſpectu A, maior fuerit, quam reſpectu B, erit A, minor multo quam B.

Prop. xi.

Quæ eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem.

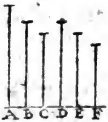


Si ratio H ad B, fuerit ut C ad Z; & ratio G ad O ut C ad Z; ratio H ad B, & G ad O, eadem erit.

Prop. xii.

Si ſint magnitudines quotcunque proportionales; quemadmodum ſe habuerit una antecedentium ad unam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

Si ratio



Si ratio A ad D, fuerit ut B ad E, & C ad F, tres antecedentes magnitudines A B C, iunctæ, erunt ad tres conſequentes D E F, iunctas, ut A ad D.

Prop. XIII.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, tertia vero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: prima quoque ad ſecundam maiorem rationem babebit, quam quinta ad ſextam.



Prima A, ſit ad ſecundam B, ut tertia C, ad quartam D. Ratio C ad D maior ſit, quam quintæ E, ad ſextam F. Quia ergo rationes A ad B, & C ad D, ſimiles ſunt; Ratio vero C & D maior eſt quam E ad F: Ratio ergo A ad B maior quoque erit quam E ad F *per* 11.

Prop. XIV.

Si prima ad ſecundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam; prima vero quam tertia maior fuerit, erit & ſecunda maior, quam quarta. Quod ſi prima fuerit aqualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ: ſi vero minor, & minor erit.



Prima A magnitudo, ad ſecundam B, ſit ut tertia C, ad quartam D; ſi A quàm C maior fuerit, etiam B maior erit quam D. Eſt vero A quam C maior: Quare ad B maiorem rationem habebit quam ad C. *per* 8. Sed cum A ad B, ſit, ut C ad D: habebit C ad D maiorem rationem, quam ad B: Quare & B quam D maior fuerit *per* 10. Et ſi prima

prima minor fuerit, quarta quoque minor erit; & ſi æqualis, ob eandem rationem æqualis.

PROP. XV.

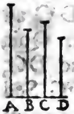
Partes cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuo reſpondent, ita ſumantur.



Sit A E pars de A B, & C F pars de C D; contineat A B toties A E, quoties C D continet C F. Quoniam ergo ut ſe una antecedentium A E, ad unam conſequentium C F habuerit, ita omnes antecedentes A B, ad omnes conſequentes C D habebunt *per* 12. quare ut A B ad C D, ita AE ad C F.

PROP. XVI.

Si quatuor mangnitudines prportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.



Sit A ad B ut C ad D. Quia *per* 12. omnes antecedentes ad omnes conſequentes ſunt, ut una antecedentium ad unam conſequentium; permutetur ordo certa ratione, ita ut A prima ſit ad B ſecundam, quemadmodum C tertia ad D quartam. Antecedentes A C, ſimul, ad conſequentes B C, ſimul, erunt ut A ad B, vel C ad D. Erit ergo A ad C ut B ad D; & per conſequens proportionales erunt, ut A ad B ita C ad D; & ut A ad C ita B ad D.

PROP. XVII.

Si compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diviſæ proportionales erunt.

Compoſitæ magnitudines ſint A B, ex A E, B E; & C D,
K ex C F,



ex C F, D F: & ſit ut tota A B ad ſui partem E B, ita tota C D, ad ſui partem F D; dico quod & A E, ad E B, ſit ut C F, ad F D. Nam ſi magnitudo C D, in puncto F, in eadem proportione ut A B, in E ſecta non fuerit, ſumatur aliud [ſi fieri poteſt] nempe G. Erunt ergo duæ antecedentes coniunctæ [hoc eſt A B] ad duas conſequentes iunctas, [id eſt C D] ut B E ad D G. Sed ponebatur tota A B ad E B, ut tota C D ad F D. Ergo *per* 16. ut A B ad C D, ita B E ad D F erit: Quare D F, æqualis erit D G, pars toti, quod eſt abſurdum.

Prop. XVIII.

Si diviſæ magnitudines ſint proportionales, hæ quoque compoſitæ proportionales erunt.



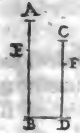
Sint magnitudines diviſæ & proportionales ut A B & C D; diviſæ punctis E, F; & ſit ut B E, ad E A, ita D F ad F C; dico quod eædem compoſitæ ſint ut B A ad B E, ita D C ad D F: Quod ſi non fuerit, ſit [ſi fieri poteſt] B A ad B E, ut D C ad aliam aliquam D F maiorem, quæ D G ſit. Quia compoſitæ magnitudines B A ad B E, ſunt ut D C ad D G, eædem diviſæ B A ad B E erunt *per* 17. ut D C ad D G. Sed ut B A ad B E, ita ponebatur D C ad D F, Ergo *per* 14. ut D C ad D F, ita D C ad D G; & pars D F, toti D G æqualis erit, quod eſt abſurdum.

Prop. XIX.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum ſe habebit.

Duæ magnitudines ſint A B, C D, & ut A B, ad C D, ita ablata A E ad ablatam C F ſit: dico reliquam, E B ad F D reliquam

Digitized by Google



reliquam eſſe ut AB ad CD. Quia enim quatuor magnitudines AB, CD, AE, CF, proportionales ſunt; erit *per* 16. CD ad CF, ut AB ad AE. *Per* 17. eædem magnitudines compoſitæ & proportionales erunt, diviſis proportionalibus exiſtentibus; Vt igitur tota AB ad totam CD, ita ablatata ad ablatam, & reliqua ad reliquam.

PROP. XX.

Si ſint tres magnitudines, aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione ſumantur; Ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit; erit & quarta, quam ſexta, maior. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc quoque minor erit.



Sint tres magnitudines A, B, C, totidem D, E, F, quæ binæ in eadem ratione ſumantur; hoc eſt, ſit A, ad B, ut D ad E, & B ad C, ut E ad F, & ſit A prima maior quam C tertia. Quia *per* 8. A ad B maiorem rationem habet quam C ad eandem B: & conuertendo ut C ad B, ita F ad E, & ut B ad A, ita E ad D. Erit ergo D quam F, maior *per* 10. Et ſi A æqualis C fuerit, etiam D, æqualis F erit. Quodſi A minor C fuerit, etiam D minor F erit.

PROP. XXI.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur, fueritque perturbata earum proportio: ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam ſexta maior. Quod

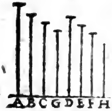
ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ; ſin illa minor, hæc quoque minor erit.



Sint tres magnitudines A B C totidemque D E F, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, ſitque earum perturbata proportio, [hoc eſt ſit ut A ad B ita E ad F, & ut B ad C ita D ad E;] ſitque A prima, maior quam C tertia. Erit *per* 8. maior proportio A ad B quam C ad B, & *per* 13. maior eſt proportio E ad F quam C ad B. Quoniam vero ut B ad C ita eſt D ad E: Erit convertendo ut C ad B ita E ad D. Quare maior erit proportio E ad F quam E ad D, ideoque maior erit D quam F *per* 10. Sic ſi A eſſet C æqualis, eſſet quoque D ipſi F æqualis: & ſi A minor C eſſet, D quoque F minor exiſteret.

PROP. XXII.

Si ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur; & ex æqualitate in eadem ratione erunt.



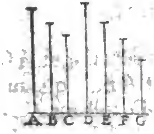
Sint tres magnitudines A B C, totidemque D E F, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, A ad B ut D ad E, & B ad C ut E ad F. Si A ad C non fuerit, ut D ad F, adiungatur prioribus G; & ſit ut A ad B ita C ad G. Erunt ergo quatuor illæ proportionales, & in ratione permutata *per* 16. erit A ad C ut B ad G. Poſterioribus adiungatur H, & ſit ut D ad E ita F ad H. *Per* 16, ergo D ad F ut E ad H erit. Sunt autem quatuor antecedentes in eodem ordine & proportione cum conſequentibus ex hypotheſi. Erit ergo A ad C ut D ad F.

PROP.

Digitized by Google

PROP. XXIII.

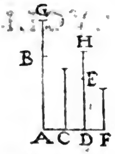
Si ſint tres magnitudines, aliæq; ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.



Sint tres magnitudines A B C, totidemq; D E F, ſitque perturbata earum proportio. Si iam D ad F, non ut A ad C fuerit, ponatur G, & ſit ut B ad C, ita F ad G. Erit tunc D ad E, ut F ad G, & quatuor illæ proportionales erunt, & per conſequens ut D ad F ita E ad G *per* 16. Eſt autem E ad G ut A ad C per conſtructionem. Igitur D ad F eſt ut A ad C.

PROP. XXIV.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quam ſexta ad quartam: etiam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta, ad quartam.

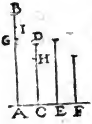


Sit AB prima ad C ſecundam ut DE tertia ad F quartam: item BG quinta ad C, ut EH ſexta ad F. Dico primam & quintam ita ad ſecundam eſſe, ut ex tertia & ſexta compoſita ad quartam. Cum enim ſit ut BG ad C ita EH ad F. Erit convertendo ut C ad BG ita F ad EH. Quoniam igitur eſt AB ad C ut DE ad F, & C ad B G ut F ad EH. Erit ex æquo A B

ad BG ut DE ad EH *per* 22. Componendo igitur erit ut tota AG ad GB, ita tota DH ad EH. Itaque cum rurſus ſit AG ad BG ut DH ad EH, & BG ad C ut EH ad F. Erit ex æquali AG ad C ut DH ad F, quod eſt propoſitum.

PROP. XXV.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.



Quatuor magnitudines proportionales ſint, ut AB ad CD ita E ad F. Maxima ſit AB, à qua auferatur AG æqualis E, & à CD tollatur CH æqualis F minimæ. Erit igitur ut AB ad AG ita CD ad CH, & *per* 19. reliqua GB ad HD reliquam, ut AB ad CD. Maior itaque GB, quam HD fuerit. Ex GB, abſcindatur GI, æqualis HD, quare AI continet E & HD magnitudines, igitur AI & F magnitudinibus, E & CD æquales ſunt. Si addatur IB magnitudo, AB & F maiores fuerint quam CD & E.

FINIS QVINTI.

EVCLI-

Digitized by Google

EVCLIDIS

ELEMENTORVM

SEXTVS.

SExto hoc libro oſtendit in ſpecie quamnam proportionem habeant inter ſe lineæ, anguli, circumferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ planæ. Maximus eius uſus eſt in compoſitione inſtrumentorum, quibus altitudines, latitudines, & profunditates metimur; qualia ſunt, *Sphæra, Schala altimetra, Aſtrolabium, baculus Iacobi, &c.* Horum omnium cęterorumque componendi & utendi modum *Geometrica* ratio ex hoc petita confirmare poteſt. Archimedeo quoque ingenio inſtrumenta huius libri ſubſidio excogitare licet, quibus pondera elevantur, tranſportantur, aut aliquo modo moventur, aliaq; plurima quæ in *Mechanicis* & negotijs humanis magnum uſum habent. *Librarum, vectium, & Coblearum* pulcherrimæ rationes ex hoc ſumuntur, amœnitateque ſua contemplantis animum mire reficiunt. Incredibile eſt, apud inperitos, quam uberes fœcundique fructus ex hoc libro petantur, quantaque voluptas hominum animis ex talium rerum meditatione accedat.

DEFINITIONES.

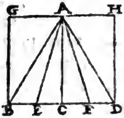
1. *Similes figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos ſingulos ſingulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales proportionalia.*
2. *Reciprocæ figuræ ſunt, cum in utraque figura antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.*
3. *Secundum extremam & mediam rationem recta ſecta eſſe dicitur, cum ut tota ad maius ſegmentum, ita maius ad minus ſe habuerit.*
4. *Altitudo cuiuſque figuræ, eſt linea perpendicularis, à vertice ad baſin deducta.*

5. Ratio

5. *Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.*

Prop. I.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe ut baſes.



Sint duo triangula ABC, ADC, eandem habentia altitudinem AC, quorum baſes BC, CD. dico triangulum ABC, ad triangulum ADC, eſſe ut baſis BC ad baſin CD. Æquibiſecentur baſes in E, F, ducanturq; AE, AF. Vt igitur baſis CE ad baſin CB, ita CF ad CD *per* 18.v. Iam ut CE ad EB, & CF ad FD: ita triangulum CAE, ad EAB; & CAF, ad FAD *per* 38.1. Et componendo, ut triangulum BAC, ad BAE; ita CAD ad FAC *per* 18.v. Et eſt eadem ratio baſium BC ad EC, ſive DC ad FC. Quare *per* 12.& 16.v. ut primum triangulum ſive magnitudo BAC ad ſecundam CAD, ita EAC ad FAC, & eadem eſt baſium BC ad CD ratio, ut demonſtravimus. Eadem parallelogrammorum CG, CH ratio eſt, cum duplum ſint triangulorum:

Corollarium.

Triangula & parallelogramma æqualium baſium, ita ſe habent inter ſe ut altitudines.

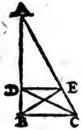
Prop. II.

Si ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam, hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera.

Et ſi

Digitized by Google

Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ad ſectiones adiuncta fuerit recta, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela.



In triangulo ABC recta DE, Parallela BC ducatur & iungantur BE, CD. Triangula DEB, EDC, cum eædem baſi DE, inſiſtant, & inter eaſdem parallelas æquales erunt *per* 37.1. Vt igitur ADE, ad DBE triangulum, ita AD, ad DB baſin [ſunt enim in eadem altitudine] & ut AED, ad ECD; ita AE ad EC *per* 1. ergo *per* 7.v. AD ad DB erit, ut AE, ad EC. Deinde ſupponatur, latera AB, AC, proportionaliter ſecta eſſe in D, E. Quia ergo ADE triangulum, ad DEB, eandem rationem habet quam ad EDC, [nam eſt ut AD ad DB, ſive ut AE ad EC] Triangula DEB, EDC, *per* 9.v. æqualia ſunt. Et quia ſuper eadem baſi ſunt, erunt inter eaſdem parallelas, *per* 39.1. DE, ergo parallela eſt BC.

PROP. III.

Si trianguli angulus æquibiſectus ſit, ſecans autem angulum recta ſecuerit & baſin: baſis ſegmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera. Et ſi baſis ſegmenta, eandem habuerint rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera; recta, quæ à vertice ad ſectionem producitur, æquibiſecat ipſius trianguli angulum.



Recta AD, angulum BAC, trianguli ABC æquibiſecet: dico eſſe ut BA ad AC, ita BD ad DC. Agatur puncto B, recta BE, parallela DA, coiens cum CA, protracta in E, eritque EBA angulus, alterno BAD æqualis *per* 29.1. & E, externo DAC. Cum ergo duo

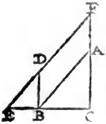
 anguli

Digitized by Google

anguli BAD, CAD, æquales ponantur, erunt & anguli EBA & E inter ſe æquales, & rectæ BA, EA, æquales *per* 6.1. Ergò *per* 2. cum in triangulo EBC rectæ DA, BE parallelæ ſint, ut EA [ſive æqualis BA] ad AC, ita BD, ad DC erit. Sit deinde ut BA, ad AC, ita BD ad DC, dico AD, angulum BAC æquibiſecare. Diſponantur BE, EC, ut dictum eſt. Quia ut BA ad AC, ſic BD ad DC, *per hypotheſin*; ut autem BD ad DC ita eſt EA ad AC. *per* 2. Erit ut BA ad AC, ita EA ad eandem AC *per* 11.v, Æquales igitur BA, EA, *per* 9.v. & anguli ABE & E *per* 5.1. Cum ergo ABE alterno BAD, æqualis ſit, & E, externo DAC, duo anguli BAD, DAC, inter ſe ſunt æquales.

Prop. IV.

Æquiangulorum triangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos; & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

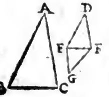


Sint triangula æquiangula ABC, DEB, quorum anguli ACB, DBE: CAB, D: ABC, E: æquales ſint; dico eſſe ut AC ad DB, ſic CB ad BE, & ut AB ad DE quæ æqualibus angulis ſubtenduntur: conſtituantur CB, BE, ſecundum lineam rectam, ita ut externus angulus DBE interno C æqualis ſit: Quare DB, parallela erit CA *per* 28.1. & ED parallela BA, cum DEB angulus ABC æqualis ſit. Productis ED, CA convenient in F, eritq; DA parallelogrammum *per* 34.1. Quoniam igitur in triangulo FCE, rectæ BD, CF parallelæ ſunt, erit *per* 2. ut ED ad DF, [ſive BA æqualem] ita EB ad BC. Et cum BA parallela ſit EF, erit CB ad BE, ut CA, ad AF [ſive BD, æqualem] & ut AB ad BE ita FD [ſive AB] ad DE.

Prop.

PROP. V.

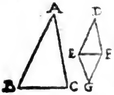
Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur.



Duorum triangulorum latera proportionalia ſint nempe ut AB ad BC, ita DE ad EF & ut AC ad CB ita DF ad FE & ut AB ad AC ita DE ad DF. Si data triangula ABC, DEF, non ſunt æquiangula; ſuper recta EF, ad punctum E ponatur angulus, B angulo æqualis, & ad punctum F, alius æqualis C ponatur: tertius ergo G, æqualis erit A *per* 32.1. & triangula ABC, EFG, æquiangula ſunt, & *per* 4. latera circa æquales angulos A & G erunt proportionalea: AB ad AC ut GE ad GF, & AB ad BC ut GE ad EF, & AC ad CB, ut GF ad FE. Sed trianguli DEF latera in eadem ratione ponebantur. DE ergo EG æqualis erit *per* 9.v. & DF, FG. Ergo triangula DEF & EEG, æqualia ſunt *per* 8.1. Et per conſequens DEF, æquiangulum *per* 1.*axio.* ABC triangulo.

PROP. VI.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint; æquiangula erunt triangula, æqualeſq; habebunt angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur.



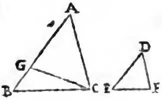
Duorum triangulorum ABC, DEF, anguli A & D æquales ſint, & latus AB ad AC ut DE ad DF: dico angulum B angulo E æqualem eſſe & C æqualem F: ſuper EF ad E ponatur angulus, B æqualis, & ad F, æqualis C.

Digitized by Google

Erit ergo G æqualis A *per* 32.1. & triangulum EFG æquiangulum ABC triangulo, & latera proportionalia erunt *per* 4. ut AB ad BC, ita GE ad EF, & ut AC ad CB, ita GF ad FE. Sed trianguli DEF, duo latera in eadem ratione ponebantur, nempe ut DE ad DF, ita AB ad AC, [ſive GE ad GF] ergo *per*.7.v. DE, *df* æquales ſunt GE *gf*, & baſi EF, exiſtente communi, triangula æquiangula ſunt *per* 8.1.

Prop. VII.

Si duo triangula unum angulum, uni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habent, reliquorum vero ſimul utrumque aut minorem, aut non minorem recto: equiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia ſunt latera.



Triangulorum ABC, DEF, anguli A & D æquales ſint, & latera ut AC ad CB ita DF ad FE, quilibet vero reliquorum angulorum B & E, ſit vel minor recto vel non minor recto. Sit primo recto minor. Si anguli ACB & F non ſunt æquales, ſit ACB quam F maior, fiatque ipſi F, æqualis ACG. Erit *per* 32. 1. AGC quoque E æqualis, & triangula AGC, DEF, æquiangula; quare ut AC, ad CG, ita DF ad FE *per*.4. Sed ut DF ad FE, ita ponitur AC ad CB. Vt igitur AC ad CG, ita eadem AC ad CB *per* 11.v. & propterea æquales CG, CB, *per*.9.v. & anguli CBG, CGB, *per* 5.1. æquales. Cum igitur B. recto minor ponatur: erit & CBG recto minor, ideoq; ei deinceps AGC, recto maior, cum AGC, CGB, ſint duobus rectis æquales *per* 13.1. Eſt autem oſtenſus angulus AGC, angulo E æqualis, maior igitur recto, eſt quoque angulus E: ſed poſitus eſt etiam recto minor; ergo idem maior & minor recto erit quod eſt abſurdum. Sit deinde tam

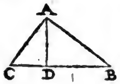
B quam

Digitized by Google

B quam E recto non minor, eruntq; ut prius B & CGB, æquales, ideoque & CGB recto non minor erit, & propterea CBG, CGB in triangulo BCG non minores erunt duobus rectis: ſed vel maiores vel æquales duobus rectis *contra* 17.1. Non ergo ACB & F inæquales ſunt ſed æquales, atque idcirco reliqui anguli B & E æquales *per* 32.1. quod eſt propoſitum.

PROP. VIII.

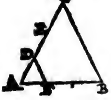
Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt.



Ex angulo recto A, perpendicularis AD, in baſin CB, trianguli ABC cadat. Quia in triangulis ABC, ADC, anguli BAC & ADC, recti ſunt, & C angulus communis, reliqui anguli ABC, CAD æquales erunt *per* 32.1. Quare ut BC ad CA, ita CA ad CD; & ut CA ad AB ita CD ad DA; & ut CB ad BA, ita CA ad AD, *per* 4. Eadem eſt demonſtratio trianguli ABD.

PROP. IX.

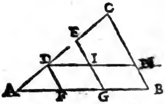
A data recta imperatam partem auferre.



A data recta AB, tertia pars auferatur. Ex A recta AC ducatur faciens angulum quemcunque, quæ in tot æquales partes ſecetur, cuiuſlibet magnitudinis, quota detrahenda ſit, ut AD, DE, EC; ducatur deinde CB, cui puncto D, parallela ducatur DF; Erit ut CD ad DA, ita BF ad FA *per.* 2. Componendo igitur ut CA ad DA, ita BA ad FA *per* 18.v. Conſtat ergo AF tertiam partem eſſe rectæ AB.

Prop. x.

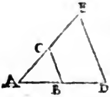
Datam rectam inſectam, ſimiliter ſecare, ut data recta ſecta fuerit.



Inſecta AB, ſit ſimiliter ſecanda ut AC, ſecta eſt in D & E, coniungantur ad A facientes quemcunque angulum CAB, ducatur CB cui punctis E, D parallelæ agantur EG, DF. *Per* 2. ut AD, ad DE, ita AF ad FG: proportionales ergo partes ſunt AF, FG, partibus AD, DE. Si DH, parallela ducatur AB puncto D: erit ut DE ad EC ita DI ad IH [hoc eſt FG ad GB quòd FG, *gb* æquales DI, *ih ſint per* 34.1.] Quare proportionales erunt partes FG, GB, partibus DE, EC.

Prop. xi.

Duabus datis rectis, tertiam proportionalem invenire.

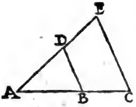


Datæ rectæ AB, AC diſponantur ut A angulum quemcunque efficiant; extendatur AB in D, ita ut BD, ſit AC æqualis; ducatur BC cui puncto D, parallela agatur DE cadens in punctum E protractæ AE. Erit ergo ut AB ad BD, ita AC ad CE *per* 4. Sed AC & BD æquales ſunt; Igitur ut AB ad AC, ita AC ad CE, tertiam proportionalem quæ quærebatur.

Prop. xii.

Tribus datis rectis, quartam proportionalem invenire.

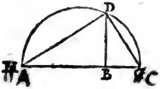
Dentur rectæ AB, BC, AD: primæ duæ ſecundum unam rectam



rectam quæ ſit A C, ponantur. Tertia cum prima A, angulum efficiat quemcunque. Ducatur B D, cui puncto C, parallela agatur C E cadens in punctum E protractæ A D. Erit ergo per ſecundam ut A B ad BC, ita A D ad D E quartam proportionalem quæſitam.

PROP. XIII.

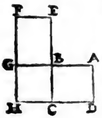
Duabus datis rectis, mediam proportionalem invenire.



Dentur rectæ AB, BC, in directum poſitæ, ſuper tota AC, ſemicirculus ADC, ponatur, puncto B perpendicularis BD, ad circumferentiam uſque educatur, iunctis DA, DC. Triangulum ADC rectangulum erit *per* 31. III. cadit vero angulo recto D, perpendicularis DB, ſuper baſin AC; facit ergo duo triangula æquiangula, *per* 8. ergo & proportionalia *per* 4. Quare ut AB ad BD ita BD ad BC, eſt ergo BD, media proportionalis inter AB, BC.

PROP. XIV.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni angulo æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos; illa ſunt æqualia.

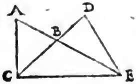


Duo parallelogramma æqualia FB, BD, angulos EBG, ABC habeant æquales: dico EB, ad DC, reciproca eſſe ut AB ad BG. Connectantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita ut AB, BG, unam rectam efficiant, extendantur

dantur F G, D C, donec coeant in H. Erit ergo ut F B ad B H ita B D ad B H *per* 7.v. Sed ut F B ad B D, ita eſt E B ad B C *per* 1. & ut D B ad B H, ita A B ad B G. Igitur *per* 11.v. ut E B ad B C, ita eſt A B ad B G, quod eſt propoſitum *Ex ſenſu* 2. *defin*. Similiter demonſtratur, ſi E B ad B C reciproca ſint ut A B ad B G; parallelogramma F B, B D, æqualia eſſe. Nam cum *ex hypoteſi* E B ad B C ſit ut A B ad B G, ita erit F B ad B H ut D B ad B H, *per* 1. Ergo *per* 9.v. parallelogramma F B, B D, æqualia erunt.

PROP. XV.

Æqualium & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos; illa ſunt æqualia.



Æqualia triangula A B C, D B E angulos ad B, habeant æquales; dico reciproca eſſe ut A B ad B E ita D B ad B C. coniungantur triangula ad angulos æquales, ita ut A B, B E unã rectam efficiant. Ducatur C E. Erit ut ABC ad BCE, ita DBE ad BCE *per* 7.v. Sed ut triangulum A B C ad triangulum D B E, ita baſis A B ad B E baſin; & ut D B E ad B C E ita D B ad B C *per* 1. Ergo ut A B ad B E, ita D B ad B C. Similiter demonſtratur ſi ut AB ad BE, ita reciproce ſit D B ad B C, triangula A B C, D B E æqualia eſſe. Nam cum *ex hypotheſi* ſit ut A B ad B C ita D B ad B C; At ut A B ad B E, ita triangulum A B C ad triangulum B C E, & ut D B ad B C, ita triangulum D B E ad triangulum B C E: Erit ut A B C ad B C E, ita D B E ad idem B C E *per* 1. Ergo triangula A B C, D B E *per* 9.v. æqualia ſunt.

PROP.

Digitized by Google

PROP. XVI.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint; quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub mediis comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub mediis continetur, rectangulo; illæ quatuor rectæ proportionales erunt.



Sint quatuor rectæ proportionales A ad B ut C ad D: dico rectangulum ſub maxima & minima, quæ extremæ ſunt C,B, comprehenſum; æquale eſſe rectangulo ſub intermedijs A & D comprehenſo. Quia eſt A ad B ut C ad D, anguli vero recti ſunt, ergo æquales *per* 10. *ax*.1. erunt latera circa æquales angulos reciproca; quare rectangula A D, C B æqualia erunt *per* 14. Deinde ſi rectangula æqualia fuerint, habebunt etiam latera reciproca *per eandem*.

PROP. XVII.

Si tres rectæ proportionales fuerint; quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub mediis comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum, æquale fuerit ei, quod à media deſcribitur, quadrato; illæ tres rectæ proportionales erunt.



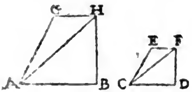
Sint tres proportionales A ad B, ut B ad D. Dico rectangulum ex A & D factum, æquale eſſe quadrato ex B facto. Quia enim C æqualis B eſt, erit A ad B ut C ad D, & quatuor rectæ A,B,C,D, proportionales ſunt. Sed *per* 16. rectangulum extremarum, æquale eſt rectangulo intermediarum quod quadra-

Digitized by Google

tum eſt; ergo B & C rectæ æquales. Et *per eandem* ſi AD rectangulum æquale BC rectangulo fuerit, rectæ ABCD proportionales erunt. Sed B & C æquales ſunt. Ergo A ad B eſt ut B ad D.

Prop. XVIII.

A data recta, dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere.



Super data recta AB, rectilineum deſcribatur, dato rectilineo CDFE ſimile, ſimiliterque poſitum. Reſolvatur primum rectilineum datum in triangula EFC, FCD, per rectam FC. Puncto A rectæ AB, *per* 23.1. ponatur angulus HAB, FCD æqualis; & ad B ponatur ABH, æqualis D. ergo AHB, erit CFD angulo æqualis *per*.32.1. Triangulum itaque ABH, triangulo CDF æquiangulum erit, & ſimile, & ut AH ad CF ita AB ad CD *per* 4. Super AH, deſcribatur quoque triangulum GHA, æquiangulum EFC triangulo. Quia ergo duo anguli AHG, *gah*, duobus angulis CFE, *ecf*, æquales ſunt; totus angulus BAG toti angulo DCE æqualis erit; Sic & totus BHG toti DFE, ut & G & E, B & D. Erit ergo CF ad AH ut EC ad GA. Sed CF ad AH eſt ut FE ad HG. ergo EC ad GA erit ut FE ad HG, circum æquales angulos. Eadem rationis reliquorum laterum demonſtratio eſt. Totum ergo rectilineum ABHG, toti rectilineo CDFE, ſimile erit, & ſuper datam AB ſimiliter deſcriptum.

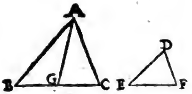
Prop. XIX.

Similia triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Sint triangula Similia ABC maius, DEF minus. Erunt ergo

latera

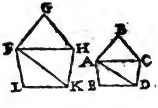
Digitized by Google



latera circũ æquales angulos [qui ſunt B, E : C, F : A, D :] proportionalia *per* 4. abſcindatur deinde à B C, rectis B C, E F tertia proportionalis B G *per* 11. & ducatur A G. Quare cum triangulorum A B G, D E F latera circa B, E angulos æquales reciproca ſint: inter ſe æqualia erunt, *per* 15. & propterea ut triangulum A B C ad triangulum D E F, ita triangulum, A B C ad triangulum A B G *per* 7.v. Vt autem triangulum A B C ad triangulum A B G eiuſdem altitudinis, ita eſt baſis B C ad B G *per* 1. Ergo ut A B C ad D E F, ita B C ad B G. Atqui ratio B C ad B G, duplicata eſt rationis B C ad E F, cum tres lineæ B C, E F, B G continuè ſint proportionales. Igitur triangulum A B C ad triangulum D E F, rationem habet duplicatam; rationis lateris B C, ad latus E F.

Prop. XX.

Similia polygona in ſimilia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis: & polygona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus.



Similia polygona ſint ABCDE, FGHKL. Quia ergo ex hypotheſi A B C angulus, F G H angulo æqualis eſt, & circum æquales angulos latera proportionalia; nempe ut AB ad BC ita FG ad GH. Ducantur rectæ A C, F H, triangula B A C, G F H æquiangula ſunt *per* 6. & G H F, angulo B C A æqualis. Sed G H K angulus, toti B C D æqualis eſt *per conſtructionem:* Ablatis itaque G H F, B C A angulis, reliqui F H K, A C D æquales erunt *per* 19.v. Iunctis F K, A D, erit F H, ad H G, ut A C, ad C D circum æquales angulos; & ut G H ad H K, ſic B C ad C D. *per* 22. Ergo ut F H ad H K ſic A C ad C D. Quia

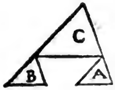
 vero

Digitized by Google

vero FHK angulus ACD angulo oſtenſus eſt æqualis, triangula KFH, DAC ſimilia & æquiangula erunt *per* 6. Et cum totus angulus HKL toti CDE ponatur æqualis eademque forma argumētandi oſtendetur, quod FKL angulus ADE angulo æqualis ſit, ut reliqui reliquis, etiam FLK, AED, triangula *per* 6. æquiangula erunt: Similea itaque polygona in ſimilia triangula dividuntur, & numero æqualia. Deinde cum ſingula triangula ſingulis ſimilia ſint triangulis, eademque unius ad alterum ratio eſt, & partes omnes junctæ toto æquantur, polygonum FGHKL, ad polygonum ABCDE, duplicatam laterum FG, AB, rationem habebit *per* 19.

Prop. XXI.

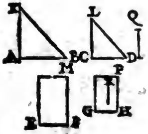
Quæ eidem rectilineo ſimilia ſunt, & iter ſe ſunt ſimilia.



Rectilinea A & B, ſimilia ſint rectilineo C; cum ergo illorum anguli, angulis rectilinei C, æquales ſint *per* 1. *defin.* angulos quoque inter ſe habebunt æquales *per* 1. *axiom.* & ob eandem cauſam latera circum æquales angulos proportionalia. Rectilinea ergo A & B ſimilia ſunt.

Prop. XXII.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint: & ab eis rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta, proportionalia erunt. Et ſi à rectis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea, proportionalia fuerint, ipſæ etiam rectæ proportionales erunt.

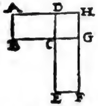


Quatuor rectæ proportionales ſint, ut AB ad CD ita EF ad GH; ſuper AB & CD, conſtituantur duo quæcumque ſimilia rectilinea, ſimiliterque poſita; & ſuper EF, GH, viciſſim alia duo. Inveniatur rectis AB, CD,

AB, CD, tertia proportionalis Q, & rectis EF, GH, tertia R *per* 11. Ergo ut AB ad Q, ita triangulum ABK, ad triangulum CDL [id eſt in ratione duplicata] & ut EF ad R, ita rectangulum EM ad GP rectangulum *per* 19. Sed ut AB ad CD, ita EF ad GH: Et ut CD ad Q, ita GH ad R; Quare *per* 22.v. ex æquo ut AB ad Q, ita EF ad R, Ergo ut ABK ad CDL, ita EM ad GP *per* 11.v. Deinde ſint eædem figuræ proportionales & ſimiles ſimiliterque poſitæ, dico & rectas ſuper quas deſcriptæ ſunt, proportionales eſſe: Nam ratio unius ad alteram, eſt ut rectæ ad rectam duplicata, ut *ex* 19. *&* 20. colligitur, Ratio ergo laterum eadem erit *per* 7. nempe ut AB ad CD ita EF ad GH. illarum ergo latera proportionalia ſunt.

PROP. XXIII.

Æquiangula parallelogramma inter ſe rationem habent eam quæ ex lateribus componitur.

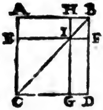


Sint parallelogramma æquiangula AC, CF, angulos BCD, ECG habentia æquales, coniungantur ad angulos æquales ita ut BC, CG, efficiant unam rectam *per converſam* 15.1. producantur deinde AD, FG, donec conveniant in H. Cum ergo *per* 2. ſit ut AC ad CH, ita BC ad CG: & ut CH ad CF, ita DC ad CE, Ratio autem AC ad CF, componitur *per* v. *defin.* ex intermedijs AC ad CH & CH ad AF; Componetur quoque eadem ratio AC ad CF, ex rationibus BC ad CG & DC ad CE, quæ illis intermedijs ſunt æquales, quod eſt propoſitum.

PROP. XXIV.

In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt parallelogramma, & toti & inter ſe ſunt ſimilia.

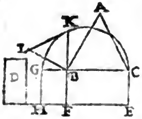
Parallelogrammi DA, diameter CB ſit, circa quam parallelogram-



logramma, FH, GE ſint, ſingula angulum ut B, C, toti communem habentia. Quia ergo EIF parallela eſt AB & GIH, CA & CB, per punctum I tranſit; anguli HBI, BIF, & EIC, ICG, æquales erunt ut & FBI, BIH; GIC, ICE, *per* 29.1. Et quatuor triangula æquiangula erunt, & per conſequens latera habebunt proportionalia *per* 4. Vt ergo BH ad HI, ita IE ad EC, & ut BF ad FI, ita IG ad GC. Propoſita ergo parallelogramma æquiangula, ſimilia, ſimiliterque poſita ſunt inter ſe & cum toto.

Prop. XXV.

Dato rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum, & alteri dato æquale conſtituere.



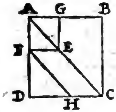
Sit datum rectilineum ABC, cui ſimile ponendum, æquale vero D, ſuper BC, fiat rectangulũ BE æquac ABC, *per* 45.1. extendatur CB verſus G & ſuper BF in angulo FBG, rectangulum BH æquale D deſcribatur; inter GB, BC media proportionalis ſit BK *per* 13. ſuper qua deſcribatur KLB, ſimile ABC *per* 18. Iam ut CB ad BK ita BK ad BG, & ut ABC ad KLB, ita CB ad BG in ratione duplicata *per* 19. & 20. Sed ut CB ad BG, ita rectangulum EB, [ſive ABC æquale] ad BH rectangulum *per* 1. Triangulum igitur KLB rectangulo BH, [ſive D ſuo æquali] *per* 14.v. æquale eſt.

Prop. XXVI.

Si a parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit, & ſimile

toti, &

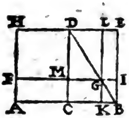
toti, & ſimiliter poſitum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit.



Ex parallelogrammo BD, ablatum ſit GF, ſimile ei, ſimiliterque poſitum, habens A communem angulum. Dico diametrum AE lineam unam rectam eſſe cum EC. Æquibiſecetur DC in H & DA in F, ducatur FH, quæ parallela erit rectæ AC, [nam trianguli FHD latera, proportionalia ſunt lateribus trianguli ADC, & per conſequens æquiangula ſunt *per* 5.] ergo cum EHD angulus, ACD angulo æqualis ſit, & HFD, angulo CAD, lineæ AE, EC una recta AC erunt, quæ parallela FH *per* 28. *&* 29. 1. ablatum ergo parallelogrammum circum eandem cum toto conſiſtit diametrum.

PROP. XXVII.

Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis ſimilibus ſimiliterq; poſitis, ei quod à dimidia deſcribitur; maximum id eſt, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum ſimile exiſtens defectui.



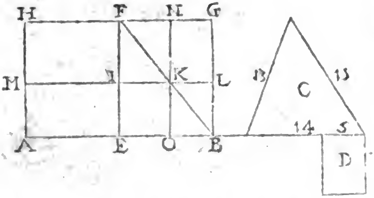
Detur recta AB, æquibiſecta in C, conſtituatur quodlibet parallelogrammum CDEB, cuius diameter BD. ſi compleatur totum parallelogrammum BH, erit parallelogrammum AD, ſuper dimidiam AC conſiſtens, applicatum ſecundum AB, deficiens parallelogrammo CE, & ſimile exiſtens defectui CE: dico parallelogrammum AD ad dimidiam AC applicatum, deficienſq; parallelogrammo CE, maximum eſſe omnium, quæ ſecundum AB rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis ſimilibus ſimiliterq; poſitis

poſitis ipſi C E, ſumpto enim puncto G utcunque in diametro BD, & ductis per G, rectis FGI, *k g l*; quæ ſint parallelæ rectis AB, *be*: Erit parallelogrammum FK, ſecundum rectam AB applicatum deficiens parallelogrammo quod ipſi CE ſimile eſt *per* 24. cum ſit circa eandem cum CE diametrum. Quoniam vero complementa CE, GE æqualia ſunt *per* 43.1. ſi addatur commune KI, erunt quoque CI, KE, æqualia. Eſt autem CI æquale ipſi CF propter baſes æquales AC, CB, *per* 36.1. Igitur & CF, KE, æqualia erunt, additoq; communi CG, æqualia erunt AG & gnomon LBM: quo, cùm CE maior ſit, erit quoque AD, æquale exiſtens ipſi CE *per* 36. 1. maius quam parallelogrammum AG eodem parallelogrammo DG: Eodemq; modo oſtendetur AD, maius eſſe omnibus parallelogrammis, quæ ita ſecundum rectam AB applicantur, ut punctum G ſit inter puncta B & D, hoc eſt quæ occupant maiorem lineam ſemiſſe AC, habentq; maiorem altitudinem quam AD, dummodo defectus ſimiles ſint ipſi CE. Omnium itaque parallelogrammorum, &c.

PROP. XXVIII.

Ad datam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri rectilineo dato. Oportet autem datũ rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non maius eſſe eo quod ad dimidiam applicatur, cum ſimiles ſint defectus, & eius quod à demidia deſcribitur & eius cui ſimile deeſſe debet.

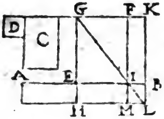
Data recta AB ſit, cui applicandum ſit parallelogrammum, rectilineo C æquale, deficiens parallelogrammo, dato alteri parallelogrammo D ſimili. Itaque ſuper dimidiam EB, parallelogrammum EG, ſimile D collocetur *per* 18. perficiaturque AG, & FB ducatur. Si C parallelogrammo AF [ſive EG] æquale fuerit, factũ eſt quod iubebatur. Si minus fuerit, certo ſpatio ſuppoſito, quod ad ſimilem figuram, D parallelogrammo



grāmo reducimus *per* 25. ſitq; I N, quæ circa diametriū F B erit *per* 26. Quia ergo per præcedentem oſtenſum eſt A K minus eſſe A F, parallelogrammo I N. Eſt autem rectilineum C quam A F, minus, *ex hypotheſi* eodem parallelogrammo I N. A K itaque C æquale erit *per* 7. *&* 11. & deficiet ab A B, ſpatio O L ſimili E G ſive D parallelogrammo.

PROP. XXIX.

Ad datam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit parallelogrammo alteri dato.



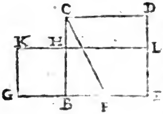
Data recta A I æquibiſecetur in E, figura rectilinea applicanda C ſit, & parallelogrammum cui exceſſus ſimilis erit D ſit. Iam ſit E F ſimilis D, & in angulo G deſcribatur parallelogrammum æquale E F & C, & ſimile E F ſive D, *per* 25. & ſit H K. Evidens eſt quod cōmuni E F ablato, gnomon F L E æqualis ſit C. ſi ergo ex dimidio reliquo factum ſit parallelogrammum H A, parallelogrammum A L æquale erit gnomoni F L E & per conſequens C, & excedet rectam A I parallelogrammo B M, quod ſimile eſt E F ſive D.

PROP. XXX.

Propoſitam rectam terminatam, extrema ac media ratione ſecare.

Secetur C B in H, ex *ſententia* 11.11. rectangulum ſub C B,

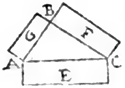
Digitized by Google



C H æquale erit quadrato de H B: Tres ergo lineæ proportionales erunt *per* 17. ut tota C B, ad H B, ita H B ad C H eſt; ergo C B ſecta eſt in H, ſecundum extremam & mediam rationem *per* 3. *deſin.*

Prop. XXXI.

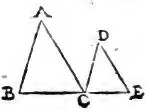
In rectangulis triangulis, figura quævis à latere rectum angulum ſubtendente deſcripta, æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus, deſcribuntur.



Sit A B C, triangulum rectangulum, cuius B angulus rectus, Dico quod ſimilia omnia polygona, ſimiliterque ſuper latera rectum angulum continentià deſcripta ut hic AGB, C F B, æqualia ſint polygono A E C, à latere rectum angulum ſubtendente deſcripto. Quoniam poligona ſimilia ſunt æquiangula; rationem habebunt duplicatam ſuorum laterum, quemadmodum & quadrata eorundem laterum *per* 19. *&* 20. Conſtat ergo ut duo quadrata, tertio æquantur *per* 47.1, ita quoque duo polygona tertio æquari, cum & hæc ut illa laterum rationem ſervent duplicatam.

Prop. XXXII.

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum unum angulum compoſita fuerint, ita ut homologa eorum latera ſint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

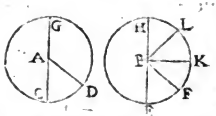


Duo triangula componantur ut efficiant angulum A C D ita ut latera homologa A B, D C, & A C, D E inter ſe ſint parallela: Erit ergo A alterno A C D æqualis &

lis & D eidem ACD *per* 29.1. quare A & D inter ſe æquales. Circũ hos æquales angulos, latera proportionalia ſunt *ex hypotheſi*; erunt inter ſe æquiangula, habebuntq; æquales angulos B & DCE *per* 6. Æqualibus A, ACD, additis, duo anguli B & A duobus DCE, ACD hoc eſt ACE æquales erunt. Rurſus communi ACB addito, fient tres anguli trianguli ABC duobus angulis ACE, ACB æquales. Sed illi tres æquales ſunt duobus rectis *per* 32.1. Ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales, atque idcirco BC, CE *per* 14. unam rectam conſtituent.

Prop. XXXIII.

In æqualibus circulis anguli eandem habent rationem cum ipſis peripheriis, quibus, inſiſtunt, ſive ad centra ſive ad peripherias conſtituti inſiſtant: inſuper vero & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt.



Superius *propoſitione* 27. III. oſtenſum eſt, quod qui in circulis æqualibus anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt, æquales ſint: Iam vero ſi qui in æqualibus circulis inæquales anguli ſunt eandem rationem non ſervent, quam peripheriæ inter ſe quibus tanquam baſibus inſiſtunt; duo inæquales anguli ponantur, CAD maior, EBF minor qui ſemirectus ſit. Arcus CD maiorem rationem habeat ad EF arcum, quam CAD angulus ad EBF angulum, *per eandem hypotheſin*, arcus GD maior, ad CD minorem, maiorem rationem habebit quam GAD angulus ad HBF: & coniungendo, duo arcus [hoc eſt dimidium circumferentiæ] maiorem rationem habebunt ad EF arcum, quam duo anguli GAD, & DAC, [hoc eſt duo recti] ad angulum EBF. Fiat KBF angulus, KBE angulo æqualis, & KBL, LBH, eidem æquales. Ergo *per* 26. III. arcus FK, KL, LH, æquales ſunt & quatuor anguli duobus rectis æquales ſunt. Evidens

Digitized by Google

dens eſt, quod dimidium circumferentia GDC, maiorem rationem habet ad dimidium circumferentiæ HLKFE, quam duo recti anguli ad duos rectos, quod falſum eſt & contra hypotheſin; ponebantur enim circuli æquales. Similiter demonſtratur quod arcus CD nō habeat rationē minorem ad EF arcum, qua CAD angulus ad EBF angulum: quare æqualis eſt. Quod vero angulos attinet, qui ad circumferentiam dimidij ſunt angulorum ad centra, eadem eſt dimidij ad dimidium ratio, quæ totius ad totum. Et quia ſectorum æqualium anguli ad centra æquales ſunt & baſes baſibus *per 4.1.& 28.111.* lineæ rectæ æquales, æquales circumferentias auferunt: Sectores vero æquales eandem habent rationem quam Arcus. Si inæquales fuerint, ponatur [ſi fieri poteſt] CAD maior ſector minorem rationem habere ad EBF minorem ſectorem, quam CD arcus ad EF arcum, *per eandem ergo hypotheſin* GDC ſector; minorem rationem habebit ad CAD minorem ſectorem eiuſdem circuli, quam GD arcus ad DC arcum, & per conſequens toti duo ſectores [hoc eſt ſemicirculus] minorem rationem habent ad ſectorem EBF quam arcus GDC ad arcum EF. Iam quatuor anguli qui ſunt ad B, inter ſe ſunt æquales, & eorum arcus *per hypotheſin.* Duo igitur ſectores GAD, DAC [hoc eſt ſemicirculus] minorem rationem habebunt ad quatuor ſectores alterius circuli B [qui ſemicirculum efficiunt] quam dimidium circumferentiæ ad dimidium circumferentiæ eiuſdem circuli, quod falſum eſt, ſuppoſito circulos æquales eſſe. Similiter demonſtratur quod maior ſector non habeat maiorem rationem ad minorem ſectorem, quam arcus ad arcum. Eadem ergo eſt unius ad alterum ratio quæ arcus ad arcum.

FINIS GEOMETRIÆ EVCLIDIS.

Digitized by Google